Peking University

北京大学

素质教育通选课教材

自然科学类

自然科学中的混沌和分形

刘式达　梁福明　刘式适　辛国君／编著

北京大学出版社


ISBN 7-301-06564-7

责任编辑：顾卫宇
封面设计：林胜利



ISBN 7-301-06564-7/O·0580 定价：10.00元

北京大学素质教育通选课教材

自然科学中的混沌和分形

刘式达　梁福明　刘式适　辛国君　编著

北京大学出版社
北　　京

图书在版编目(CIP)数据

自然科学中的混沌和分形/刘式达等编著. —北京:北京大学出版社,2003.11

(北京大学素质教育通选课教材)

ISBN 7-301-06564-7

Ⅰ.自…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.①混沌学-高等学校-教材②分形理论-高等学校-教材　Ⅳ.0415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 085993 号

书　　名:自然科学中的混沌和分形
著作责任者:刘式达　梁福明　刘式适　辛国君　编著
责 任 编 辑:顾卫宇
标 准 书 号:ISBN 7-301-06564-7/O·0580
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
890×1240　A5　5.375 印张　150 千字
2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷
定　　价:10.00 元

内 容 简 介

本书是作者多年来从事该通选课程教学经验的结晶。强调“内在随机性”是混沌的本质，“无特征尺度”是分形的研究对象。全书共分十章，着重从动力学上分析状态的演化，说明混沌是客观存在的一种状态，以及分形是如何描述“大涡旋中包含小涡旋”这种现象的；同时也将和混沌分形相关的标度对称性、螺旋结构、异常扩散、小波变换、斑图、长尾巴分布等内容有机地结合在一起介绍给大家。

本书尽量从物理学入手，由浅入深地描述。读者应侧重了解最新的概念和科学思想。为了便于教学，每章末附有习题。

本书可供大学本科生、研究生作为通选课教材和教学参考书。

前　言

“自然科学中的混沌和分形”作为北京大学素质教育通选课已经讲授了多次。开设此课的目的就是要使本科生了解混沌和分形这个领域的基本思想、科学研究方法，以及我们认识自然界时，从中能获得的新观点。这些观点在其他课程中是很难得到的。由于着重给学生们以新思想，因而本书定位在非线性物理学，并以定性分析的方法，把混沌和分形的特征以及结构展现出来。为此，本书每一章的标题都是一个新观点，以便学生了解思想实质，在今后的学习中不断深入和应用。

本书共分十章，第一章说明自牛顿力学以来的300多年中，为什么混沌和分形成为20世纪末和21世纪的学科前沿。第二章告诉大家一个新观点：随机的结果可以在无随机的确定的系统中产生，这就在“确定”和“随机”之间架起了桥梁。第三章用几何的观点和图像来描述自然界多样性的形态。这是一种定性分析的方法，它往往比定量分析方法来得简单有效，可使学生做大量计算之前，就对问题“心中有数”了，物理意义更清楚、踏实了，不至于陷入大量计算的忙碌、盲目的境地，而现在学生掌握定性分析方法太少了。第四章则消除自然科学中常见的一种误区：认为有周期性的输入，必有周期性的输出。这种误区有可能使我们在寻找事物变化的原因时往往在外部找，而不去事物内部找。第五章从命题“如何描述大涡旋中有小涡旋，小涡旋中还有更小涡旋?”出发，引出了分形和分维的概念，说明像这种较难的命题，人们还是可以设法解决的。第六章从争论不休的“为什么维数还会有分数?”的讨论中，从物理上说明分数维是一种不变量，对称性中又增加了一种“标变对称性”。第七章则把混沌和分形与大自然中的美丽的结构和斑图(pattern)联系起来，使自然界普遍存在的螺旋结构、树枝结构、动物的各种斑纹结构等复杂结构的研究开了“窍”。第八章把物理状态的演化从传统的“时间序列演化”转变成“轨

道的演化”，这种想法令人思索。第九章则是物理的实际问题：异常扩散。从“正常扩散”到“异常扩散”，从“正态分布”到小概率的“长尾巴分布”，说明物理学研究的深入，研究侧重点的变化。第十章介绍多尺度分析的工具——小波变换，它将分形概念和状态的突变联系起来。本书第五章由梁福明编写，第十章由刘式适和辛国君编写。其他各章均由刘式达编写。

本书力图通俗易懂，但为了说明难免用到一点微积分，但希望读者尽量掌握新的思想观点。

作　者

2002年12月

目　录

第一章　从牛顿到曼德布罗

假如从牛顿(1643～1729)1680年在伦敦皇家学会发表“自然哲学数学原理”算起，直到1963年美国气象学家洛伦茨(E. N. Lorenz)发现了混沌(chaos)，1982年美国工程师曼德布罗(B. B. Mandelbrot)出版了第一本有关分形(fractal)的专著《自然界的分形几何》(*The Fractal Geometry of Nature*)，物理学已经经历了300多年.这300多年中物理学发生了什么变化呢?

在科幻小说《侏罗纪公园》中写道：物理学在描述某些问题的行为上取得了巨大的成就，例如轨道上运转的行星、向月球飞行的飞船、钟摆、弹簧、滚动的球之类的东西.这都是物体的规则运动.这些东西用所谓的线性方程描述，数学家想解这些方程是轻而易举的事.几百年来他们干的就是这个.可是，还存在着另一类物理学难以描述的行为.例如与湍流有关的问题，机翼上方流动的空气，天气，流过心脏的血液.它们要用非线性方程来描述，它们通常是无法求解的，所以物理学从来没有弄通这类事情，而混沌是描述这类问题的新理论.

§1　混沌和分形是学科前沿

300多年中，物理学已经完成了两次革命.第一次是以伽利略、牛顿为代表的17世纪在研究物质、力和运动上的突破.第二次是量子力学、相对论和放射性的发现.开普勒关于行星运动的三个定律、牛顿第二定律，对认识自然界取得了巨大的成就：懂得了轨道上运转的行星规律，向月球发射了飞船，钟摆、弹簧、齿轮、火车、轮船、飞机等都已是日常生活的必要工具.与之相应的是欧几里得几何、数学分析中的微积分.这些成就同时体现出长期统治物理学的观点是确定论，它们只是确定论在物理学、几何学和数学中的具体体现.确定论使物理学以可预言的方式表现各种行为，当时许多科学家把科学

与预测等同起来. 确定论的代表论点是法国科学家的名言：只要知道初条件就可以决定未来的一切.

对确定论以较大冲击的是量子力学的出现. 在经典力学中动量 p 和位置 q 是独立的，但是在微观世界中，光子动量 p、频率 ν 的光所对应的波长 λ 之间建立起来关系 $\lambda=h/p$，其中 h 为普朗克常量. 海森伯的不确定关系 $\Delta p \cdot \Delta q \geqslant h$ 告诉我们无法同时精确测量位置和速度这两个量. 这就意味着，未来有些量是不能精确预测的.

确定论何以能统治物理学相当长的时间，是因为它的数学基础是运动方程的存在惟一，以及初始条件变化一点，运动方程的解只变化一点的数学定理. 现在我们知道，这些结果全是局部定理，目前并不存在对所有时刻都适用的全部定理. 由于物理上过去研究的问题多数仅限于线性方程，研究的解也仅限于单调、光滑的，这些定理构成了这些物理问题的基础. 而我们今天遇到的许多是非线性问题，它们的解是多样的，甚至是奇异的. 例如天气预报问题，它是由确定的流体力学的 Navier-Stokes 方程(对大气还要考虑由于地球旋转引起的科里奥利力)以及热力学方程控制的. 为简化计，我们将预报方程写成如下形式：

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.1}$$

其中 $f(x)$ 是控制大气运动的确定性的规律，x_0 代表初始时刻的大气状态(例如今天的温度)，那么由今天温度 x_0 预报明天的温度 x_1，由明天温度 x_1 预报后天温度 x_2，都是按照同一个方程(1.1)去计算的. 但事实证明，由今天的天气状况 x_0 能预测多少天($n=?$)以后的状态呢？大约最多 5～6 天. 图 1.1 是气象学家洛伦茨给出的两条曲线.



图 1.1　长期天气预报不可能

从图上看出，实线和虚线的初始条件仅差别一点点，最初一两天，由初始条件算出的天气两者相差并不很大．但是5～6天后的天气，两者却差别很大．实线的结果是按照确定的公式(1.1)算出来的，没有错；虚线的结果也是按照确定的公式(1.1)算出来的，也没有错，但两者的结果却不同，因此究竟5～6天后的天气状态怎样？我们事先并不能预测．也就是说，确定的天气预报方程(1.1)可以出现随机的结果，这就是洛伦茨1963年发现的混沌的含义．

因此混沌的发现是对确定论以最大的冲击．过去物理学只知道确定的系统只能出现确定的结果，绝对不会有不确定的结果，而把一些包含随机因素的现象常常归结于外部的噪声所引起的．在物理学、大气科学、生物学、天文学、经济学、化学等科学中早已发现存在貌似随机的行为：天气没有一天是相同的，人脑的脑电图是随机的，DNA序列是无规则的，土卫七的混沌自转……现在我们面临的世界的科学问题是气候变化、生物进化、经济全球化、生态破坏……，每一件事都要跟随机打交道．现在知道了确定性的系统也可以出现随机的结果，那么就可以从确定的系统出发分析这些随机的现象了．牛顿第二定律也可以解释随机的结果，使得牛顿定律更加丰富了它的应用．流体力学满足确定性的Navier-Stokes方程，它可以描述随机的湍流现象．大气运动满足确定性的热力动力学方程组，它可以描述每天都不相同的天气．很多生命现象可以用确定性的反应——扩散方程来描述，许多多样化的不同形态也可以得以解释．生物多样化、宇宙星体分布的复杂性、地震发生的突然性都受到混沌概念的启发．

和混沌对物理学的冲击一样，分形(fractal)概念将“尺度”这个自变量引入物理学中，许多自然现象离开尺度来谈就毫无意义了．例如中国的海岸线长度为18 000公里似乎早已成为常识．但分形启发的问题却是海岸线的长度是随着尺度不同而不同的．我们设想，如果中国13亿人每人带一个卷尺，约好明天上午10:00从东北到海南同时去测量中国海岸线的长度，将13亿人测量的结果相加(就是要连接起来)，恐怕中国的海岸线长度将比一百万公里还要多，当然这仅仅是一个假设，但能说明问题．为什么是这个结果呢？原来中国的海岸线不是直线，它有大大小小的弯曲，大的弯曲达数百公里(如渤海

湾),小的弯曲只有几厘米.从厘米到数千公里,其差别达 $10^8 \sim 10^9$ 数量级,这是一种无特征尺度的现象.用空中摄影的办法去量海岸线,连数十公里的弯曲都看不出来,但若亲自到海边去量,数厘米的弯曲也量得出来.所以,我们不能提“海岸线有多长?”这类问题,因为海岸线的长度是随尺度变化而变化的.

现在全世界从科学家到政府首脑都在说:气候变暖了.实际上这种说法不正确,因为气候是冷还是暖也是随尺度而变化的.若气候的尺度从季节变化开始算起,一年、十年、百年、千年、万年、十万年……的尺度上都有气候的冷暖.从十万年尺度上讲,现在可能处在冷期,但从百年尺度上却处在暖期.所以,离开尺度谈气候冷暖或旱涝都是毫无意义的.

地震的震级从 1 级到 8 级,而每一级地震的能量相差 30 倍,因此 8 级地震和 1 级地震的能量差 30^7 倍.如果以能量作为尺度,地震发生的次数显然是随着尺度变化而变化的,因为大地震的次数少,然而,一级地震却天天都有.

大气中的大涡旋(像气旋和反气旋)的尺度达千公里,而小涡旋的尺度仅几厘米.为了研究天气预报,科学家人为地不考虑小尺度的涡旋而专门研究大尺度的运动.而为了研究雷阵雨就不考虑大尺度的运动而专门研究中小尺度的运动.台风的尺度是百公里,称为中尺度运动.正像物理学上有宏观物理学和微观物理学之分一样,现在又研究尺度介于两者之间的介观物理学(如纳米尺度).而实际上大气中的大小涡旋是彼此相连的,大涡旋中包括小涡旋,大涡旋动了,小涡旋也必然动.湍流研究的困难之处也正是因为它包含有大大小小不同尺度的涡旋,同样我们也不能提“湍流涡旋的个数有多少?”这样的问题,因为它是随着尺度的变化而变化的.

怎么办呢?分形概念告诉我们,在多尺度系统中,物理量是随尺度而变化的,关键的问题是寻找该系统随尺度变化而不变的量.其中分数维(fractal dimension)就是这种不变量.物理学的临界现象中,在临界点处,粒子之间的关联越来越大,从而形成各种尺度的“集团”和“涨落”,所寻找的临界指数也是这种不变量.

正因为混沌和分形与传统的物理学概念相悖,同时很多复杂的

实际问题又迫切地需要这两个概念来充实,所以必然成为当前科学的前沿.

§2 非线性的实质

“混沌”和“分形”是两种主要的非线性现象.它不但在确定性和随机性之间架起了桥梁,而且激起了非线性现象的广泛研究.非线性的实质是什么?

20 世纪以来,科学界最关心的一个名词恐怕就是“相互作用”(interaction).全球关注的环境问题不外乎就是人类和环境之间的相互作用.在研究气候变化时,主要考虑海洋和大气之间、海洋和陆面之间的相互作用.在赤道东太平洋出现的厄尔尼诺(El-Nino)现象时,就联想起固体地球自转角速度的变化和海洋、大气之间的相互作用.因为固体地球、海洋和大气之间的角动量是要交换的.当地震发生时,人们自然关注天文因子的影响,形成“天文地球动力学”的前沿课题,研究天文—地球之间的相互作用.

事物之间的相互作用,说明相互联系的事物不是单方面的影响,而是相互影响、相互制约和相互依存的,这就是非线性的实质.

就拿大鱼吃小鱼这件事来说吧,似乎小鱼多了大鱼也会多,这是单方面的影响.但是反过来大鱼多到一定程度,小鱼必然会少,大鱼也自然会少.所以说是相互作用的.若 x 和 y 分别表示大鱼和小鱼的数目,那么,x 和 y 随时间的变化为

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(\text{大鱼的增长率})-(\text{大鱼的死亡率}),$$

$$\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(\text{小鱼的增长率})-(\text{小鱼的死亡率}).$$

大鱼和小鱼之间的相互作用表现为:大鱼的增长率既依赖于大鱼的数量,又依赖于小鱼的数量,即

$$\text{大鱼的增长率}=axy,$$

同时,小鱼的死亡率也和 x 及 y 有关,可设

$$\text{小鱼的死亡率}=-bxy.$$

这样,大鱼和小鱼数量的变化可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = axy - cx,\\ \dot{y} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = dy - bxy,\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中,cx 表示如果没有小鱼,则大鱼的死亡率和大鱼的数量成正比,dy 表示如果没有大鱼,则小鱼的增长率和小鱼的数量成正比.

数学上(1.2)式中的 x 和 y 是因变量,它们的乘积项 xy 就称为非线性项,或称 x 和 y 之间的“耦合”(couple). 方程(1.2)就称为非线性常微分方程. 方程(1.2)正说明,小鱼 y 多了,大鱼 x 数量就增加;但是大鱼 x 多了,小鱼 y 的数量反而会减少. 若将方程(1.2)中的非线性项去掉,那么结果就只能是小鱼越来越多,大鱼最终全部死掉.

我们虽然还不能去求解方程组(1.2),但从分析已经知道,若是线性方程,解的形态一定是单调的,或者是大鱼死小鱼活,或者是小鱼死大鱼活. 但若是非线性的话,如方程(1.2),大鱼多了小鱼少,反过来小鱼少了,大鱼饿了也要减少;大鱼少了,小鱼又多了起来,这就可能出现大鱼和小鱼数目按一定的周期循环,甚至于会出现数目多少不定的非周期状态. 总之,对非线性系统,形态则不像线性系统那样单调,而是多样的.

在流体力学和大气运动中,非线性的相互作用则表现为另外的形式. 白天太阳将地面加热,因此下层空气比上层空气温度要高,因而形成了温度梯度$\frac{\partial T}{\partial z}$. 夏天常由这个上下空气的温度差而形成热对流,产生上升运动 w. 若无非线性作用的话,则空气一直上去就不下来了. 但是由于非线性,热空气上升,上面的冷空气向下运动. 这种热空气向上、冷空气向下又反过来降低了当初形成热对流的温度梯度$\frac{\partial T}{\partial z}$. 因此垂直速度 w 和温度梯度$\frac{\partial T}{\partial z}$的乘积 $w\frac{\partial T}{\partial z}$是 w 和 T 相互作用的非线性形式,它称为温度对流. 同样,冬天西伯利亚冷空气南下也会有 $u\frac{\partial T}{\partial x}$形式的温度平流. 天气正是由于这种不断的温度平流,造成“没有一天天气是相同”的混沌状态.

同样,分形的产生也必然在非线性系统中.若是长度为一个单位的直线段,不管用什么尺子去度量,量出的结果都是单位1,最多有一点测量误差.但是,若是海岸线,它有大大小小尺度不同的跨量级的弯曲,那么量出的结果随尺度不同而不同了.海岸线是曲线,这就是非线性.在非线性流体力学系统中,不同尺度大小的涡旋是相互作用的,若大涡旋供给小涡旋能量的话,反过来小涡旋之间的相互作用又会影响大涡旋的能量.

因此,非线性的实质是事物之间的相互作用,非线性的基本特点是产生多样性和多尺度性.混沌和分形只能在非线性系统中产生.

习　　题

1. 在你的学科中,有什么现象与随机过程相联系?你是如何解释它的?

2. 你如何理解"海岸线有多长?"这种提法不正确?

第二章　确定的系统可以有确定的结果，也可以有不确定的结果

虽然自然界的随机现象很多，像天气、湍流、气候、El-Nino、地震等，但是，物理学的许多数学模型在过去300年中还没有在确定的系统中（如牛顿第二定律的系统中）算出非周期的结果来. 混沌最大的贡献就是用简单的模型就可以得到明确的非周期的结果.

早在1890年法国著名科学家庞加莱（Poincaré）的论文《论三体问题和动力学方程》就提到，二体（例如地球和太阳）运动是周期性的，但是当研究三体（例如海王星、冥王星和一粒星际尘埃）运动就会发现是非常复杂的. 正像他所说：图形的复杂性令人震惊，我甚至不想画出来.

§1　非线性系统形态的多样性

天气预报方程是一个描述所预报天气状态（如温度、降水、气压等）随时间和空间变化的流体力学和热力学偏微分方程组. 但从物理上讲，这个方程组不外乎有三种因素构成：驱动天气变化的因素（如引起对流的上下空气层的温度差）、耗散因素（如空气的黏性）和非线性因素（如前面介绍的温度平流）构成. 因此，天气预报方程可以简化成如方程（1.1）的简单形式：

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n), \qquad (2.1)$$

$$x_n \in [0,1], \quad \mu \in [0,4],$$

其中，x_n 是天气状态变量，μ 是系统控制参数. μx_n 是驱动天气状态由第 n 时刻的 x_n 变到第 $n+1$ 时刻的 x_{n+1} 的驱动因素，$-\mu x_n^2$ 表示耗散因素，x_n^2 表示非线性因素. 控制参数 μ 的大小反映了驱动因素和耗散因素的相对大小.

(2.1)式这种类型的方程可以描述很多现象. 如生态现象，此时 x_n 代表生物种群的数目，μ 代表繁殖率，$-x_n^2$ 代表由于自然环境造成的食物限制或者战争带来的物种的灭亡. 描述生态现象时，方程(2.1)称为逻辑斯蒂映射(logistic map).

(2.1)式称为一维映射，或称为迭代函数系统. 在(2.1)式右端将初始时刻的状态 x_0 代入，则左端就得到下一时刻的状态 x_1，再将 x_1 代入右端，左端就得到 x_2，…，这样不断下去就得到一个状态的时间序列或者轨道：

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots. \qquad (2.2)$$

下面我们将看到，这样一个简单的确定性的方程(2.1)，确实有多种多样的最终形态.

1. 定常状态

在计算 x_n 过程中，当右端用 x^* 代入时，若左端又得到 x^*，那么就说明此时的 x^* 就是随时间 n 不变化的解，称为定常解，也称不动点.

于是令(2.1)式的左边和右边相等：

$$x = f(x) = \mu x(1 - x), \qquad (2.3)$$

这是个代数方程，很容易解得.

$$x(\mu x - \mu + 1) = 0, \qquad (2.4)$$

因此得到两个定常解(定常状态)

$$x^* = 0 \quad 和 \quad x^* = 1 - \frac{1}{\mu}. \qquad (2.5)$$

(2.1)式左边的图像是在直角坐标系中的一条直线 $y=x$，右边的图像是一条抛物线，抛物线的顶点在 $x=\frac{1}{2}$处，高度为$\frac{\mu}{4}$. 定常解就是直线 $y=x$ 和抛物线的交点，见图 2.1.

若在 x 轴上取一点 x_0，代入(2.1)式右端得到 $f(x_0)$，这在图 2.1 上就相当于从 x_0 点垂直向上作一条垂线交抛物线上一点的垂直长度，再由该交点作一条平行线交直线 $y=x$ 于一点，该点到 x 轴的垂直距离就是 x_1，它就是由原点到 x_1 的距离，它就是由 x_0 迭代求得的 x_1 值. 所以每迭代一次的过程就是作垂线交 $f(x)$，再作平行线交 $y=x$. 如图 2.1 中的虚线和箭头所示.

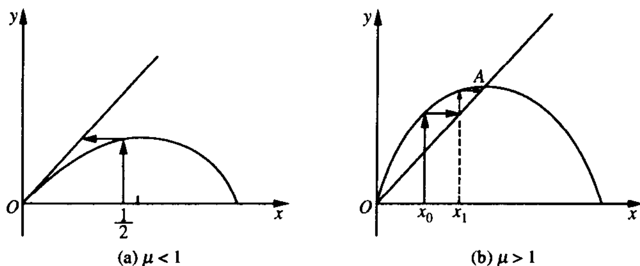


图 2.1　式(2.1)的迭代过程

当参数 $\mu<1$ 时(见图 2.1(a)),由 x_0 出发迭代时求出的 $x_1,x_2,\cdots$,愈来愈接近于 $x=0$,即收敛到方程(2.1)的第一个定常解 $x^*=0$. 而当 $\mu>1$ 时(见图 2.1(b)),由 x_0 出发迭代时求出的 $x_1,x_2,\cdots$,愈来愈偏离 $x^*=0$,而收敛到直线 $y=x$ 和抛物线 $y=f(x)$ 的另一个交点,它就是(2.1)式的第二个定常解 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$. 为了保证这个定常解是正值,显然要求 $0<\mu\leqslant 1$.

2. 周期解

按照传统的看法,对式(2.1),从初始值 x_0 出发,一直迭代到相邻两次迭代值之差小于约定的误差为止,即若 $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$,则迭代就收敛了. 不是收敛到 $x^*=0$ 就是收敛到 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$,怎么还会有周期解呢?

原来在(2.1)式中,若迭代到某一步,右端用 x_1 代入,左端求得 x_2,若再用 x_2 代入右端,左端又得到 x_1,即

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1), \\ x_1 &= f(x_2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

即迭代的结果为

$$x_0,\cdots,x_1,x_2,x_1,x_2,x_1,x_2,\cdots. \tag{2.7}$$

这样,迭代到一定程度以后,x_1 和 x_2 两个数循环出现. 若是从迭代收敛的观点,相邻两次迭代值之差 $|x_1-x_2|$ 决不会小于任意给定的一个小误差 ε,似乎并不收敛. 但这个解(周期 2 解)的确存在. 将(2.6)式第一式代入第二式,或者将第二式代入第一式,则得到 x_1

和 x_2 满足的方程为

$$x = f(f(x)) = \mu[\mu x(1-x)][1-\mu x(1-x)]$$
$$\xlongequal{\text{记为}} f^2(x). \tag{2.8}$$

(2.8)式是一个四次代数方程,它有四个实根. 由于将 $x=f(x)$ 代入(2.8)式右端导得 $x=f(x)$,因而(2.8)式含有 $x=f(x)$的两个根,如(2.5)式. 因而在(2.8)式中除去$(x-0)$和$\left[x-\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right]$这两个定常解因子,则导得二次方程

$$\mu^2x^2-(\mu^2+\mu)x+(\mu+1)=0, \tag{2.9}$$

因而求得的周期 2 解为

$$x_{1,2}=\frac{(\mu+1)\pm\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}. \tag{2.10}$$

同样,从(2.10)式看出,为了保证 $x_{1,2}$为实数值,参数 μ 必须大于 3. 例如取 $\mu=3.2$ 时,由(2.10)式算出的周期 2 解为 $x_1=0.513$, $x_2=0.799$.

(2.1)式不但有两个数——循环的周期 2 解,还会有 4 个数——循环的周期 4 解,它们满足的方程显然为

$$x=f(f(f(f(x))))\xlongequal{\text{记为}} f^4(x), \tag{2.11}$$

其中将周期 1 的定常解 $x=0$ 和 $x=1-\frac{1}{\mu}$以及周期 2 的两个解(如(2.10)式)扣除后,方程(2.11)剩下的四个实数根就是所求的周期 4 解.

一般(2.1)式还有周期 8,16,32,…,2^n 的解. 也存在周期 3、周期 5 这种形式的周期解.

3. 混沌解

对(2.1)式的计算表明,在参数 μ 达到一个临界值

$$\mu_\infty=3.57 \tag{2.12}$$

后,其状态则由有限的周期 2^n 状态,变到周期无限($n\to\infty$)的混沌状态. 图 2.2 显示的是(2.1)式的周期 1、周期 2、周期 4、……,以及混沌状态.

由此看来,一个如此简单的一维映射,却有定常解、各种周期解

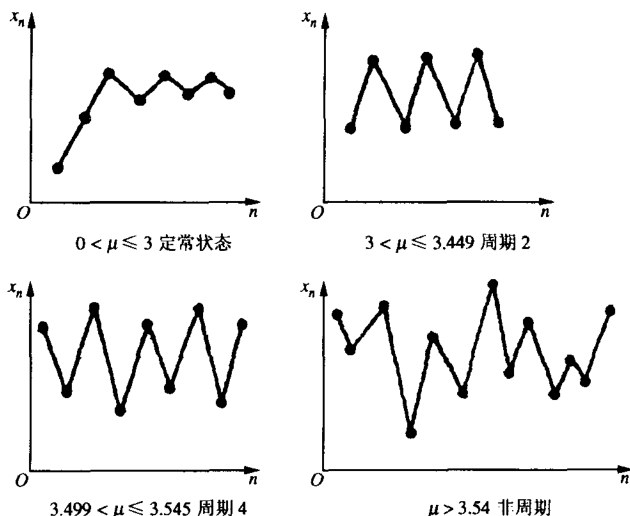


图 2.2 (2.1)式的多种形态

和混沌解,形态是多样的.但是若(2.1)式是线性系统

$$x_{n+1} = 0.5x_n \quad 和 \quad x_{n+1} = 2x_n, \tag{2.13}$$

那么形态就单一了,对(2.13)式的第一个映射只有一种形态,即 $x_n \to 0$;对第二个映射,$x_n \to \infty$.

那么一个非线性系统这么多的形态是如何转化的呢?我们来看下面的分析.

§2 驱动力和耗散力的竞争

正如前节所述,(2.1)式中的 μx_n 项表示驱动原有状态改变的一种力,而 $-\mu x_n^2$ 项表示耗散因素.因此加上(2.1)式是非线性的,两种因素的竞争便会造成(2.1)式的形态是多种多样的.正像两个人打拳一样,若其中一人特别强,那么另一人很容易被打倒,这种形态很简单.但是当两个人的拳术和力量相当时,则可能形成拉锯战,甚至难分胜负的复杂状态.

怎么判断这两个力的相对大小呢?由于这两个力混杂在函数 $f(x)$ 中,我们给定一个定常状态 x^*,并给定一个变化 δx_n,看它对

x_{n+1}会引起多大的变化. 从(2.1)式很容易得到

$$\delta x_{n+1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} \delta x_n, \tag{2.14}$$

因此只要

$$|\lambda| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} < 1, \tag{2.15}$$

当 n 增加时，δx_{n+1}就趋向于 0,即状态仍然保持在 x^*,这就意味着驱动力小于耗散力. 反之,若

$$|\lambda| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} > 1, \tag{2.16}$$

则表示驱动力大于耗散力,状态就要离开原有的状态(δx_{n+1}会增大),而转变到另一个状态. $|\lambda|$实际上就是在点 x^*处 $f(x)$的斜率.

例如对于定常态 $x^*=0$,由(2.1)式得到

$$|\lambda| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = (\mu - 2\mu x)|_{x=0} = \mu. \tag{2.17}$$

因此按(2.15)和(2.16)式,当 $0<\mu<1$ 时,驱动力小于耗散力,此时保持原有的状态 $x^*=0$,我们称此时状态 $x^*=0$ 是稳定的. 而当 $\mu>1$ 时,此时驱动力大于耗散力,则状态就要离开 $x^*=0$,此时我们称状态 $x^*=0$ 是不稳定的. 那么它要变到什么状态呢?

我们再来看定常状态 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$,此时

$$|\lambda| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=1-\frac{1}{\mu}} = \left|\mu - 2\mu\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right| = |-\mu+2|, \tag{2.18}$$

按(2.15)式要求:

$$|-\mu+2|<1,$$

即

$$-1<-\mu+2<1,$$

即

$$1<\mu<3. \tag{2.19}$$

因此对 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$而言,在 $1<\mu<3$ 时,驱动力小于耗散力,因而它是稳定的;而在 $\mu>3$ 时,驱动力大于耗散力,它是不稳定的.

归纳起来讲，状态 $x^*=0$ 在 $\mu=1$ 处刚好要发生驱动力大于耗散力，因而状态则由 $x^*=0$ 转变成状态 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$. 当控制参数 μ 变化时，系统状态发生了变化就称为分岔. 我们称状态 $x^*=0$ 在参数 $\mu=1$ 处发生了一次分岔.

从(2.19)式看出，显然状态 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$ 要在 $\mu=3$ 时发生一次分岔，它转变成什么状态呢？我们看周期 2 满足的方程(2.8). 将它和定常解(或者周期 1)满足的方程(2.3)比较看出，周期 2 相当于将(2.3)式右端的 $f(x)$ 换成了 $f(f(x))$. 此时(2.14)式中的 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*}$ 就要换成 $\left.\frac{\partial f(f(x))}{\partial x}\right|_{x_1,x_2}$ 了.

按照复合函数微商公式得

$$\lambda=\left.\frac{\partial f(f(x))}{\partial x}\right|_{x_1,x_2}=f'(x_1)\cdot f'(x_2),\tag{2.20}$$

若 $\lambda=-1$，此时驱动力和耗散力相等，由(2.20)式得

$$\mu(1-2x_1)\cdot\mu(1-2x_2)=-1$$

或者

$$\mu^2[1-2(x_1+x_2)+4x_1x_2]=-1.$$

由(2.9)式可知，$x_1+x_2=\frac{\mu^2+\mu}{\mu^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{\mu+1}{\mu^2}$，代入到上式得

$$\mu^2\left(1-2\cdot\frac{\mu^2+\mu}{\mu}+4\cdot\frac{\mu+1}{\mu^2}\right)=-1,$$

解得

$$\mu=1\pm\sqrt{6}.\tag{2.21}$$

我们取(2.21)式中的正号. 这就意味着当

$$3<\mu<1+\sqrt{6}=3.449\tag{2.22}$$

时，对周期 2 状态，耗散力小于驱动力，它是稳定的. 在 $\mu=3$ 处，状态 $x^*=1-\frac{1}{\mu}$ 则分岔出周期 2 状态. 同样，在 $\mu=1+\sqrt{6}=3.449$ 处，周期 2 状态开始不稳定，又分岔出周期 4 状态，它又分岔出周期 8 状态，…. 这种周期加倍的过程称为周期倍分岔(period doubling bifurcation)，不断串级(cascade)分岔下去，直到 $\mu_\infty=3.57$ 分岔出混

沌状态.

所以(2.1)式的状态的转化完全是驱动力和耗散力竞争的结果,当驱动力比较弱时(μ 较小),状态只能是定常态.当耗散力和驱动力相当时(μ 较大),就会出现两种力竞争不相上下的局面,此时会出现各种周期状态和混沌状态.所以混沌状态的出现是非常自然的,正像流体中的雷诺数 Re(它表示惯性力的驱动力和耗散力之比值)较小时,流体显示出层流状态,而当雷诺数 Re 超过某个临界值时,流体就显示出湍流状态一样.这种混沌状态不是计算错误造成的,而是自然界客观存在的一种状态,只是过去 300 年来没有用简单的模型证实而已.

上述的两种力竞争而导致非线性一维映射状态发生变化的理论也适合于非线性二维映射.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{2.23}$$

和(2.3)式类似,(2.23)式的定常状态满足

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*, y^*), \\ y^* &= g(x^*, y^*). \end{aligned} \tag{2.24}$$

对(x^*, y^*)的一个变化$(\delta x_n, \delta y_n)$,它们引起的变化$(\delta x_{n+1}, \delta y_{n+1})$与(2.14)式类似,为

$$\begin{aligned} \delta x_{n+1} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^*, y^*)} \delta x_n + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^*, y^*)} \delta y_n, \\ \delta y_{n+1} &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^*, y^*)} \delta x_n + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^*, y^*)} \delta y_n. \end{aligned} \tag{2.25}$$

将(2.25)写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

(2.26)式是一个线性差分方程,判别两种力是否平衡,我们可设$\delta x_n = A \cdot \lambda^n$,$\delta y_n = B \cdot \lambda^n$,代入(2.26)式,则导得

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0. \tag{2.27}$$

(2.27)式是关于(A,B)的齐次线性代数方程组,要为非零解只有其行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}-\lambda & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}-\lambda \end{vmatrix}_{(x^*,y^*)} = 0, \qquad (2.28)$$

此时,λ 称为(2.27)式中矩阵(称为雅可比矩阵)的特征值. 因此,当 $|\lambda|<1$ 时,耗散力小于驱动力,定常状态(x^*,y^*)是稳定的;而当 $|\lambda|>1$ 时,驱动力大于耗散力,则定常状态(x^*,y^*)是不稳定的. 所以,一维映射中判断两种力大小的 λ 也称为特征值.

(2.1)式的周期倍分岔过程,见图 2.3.

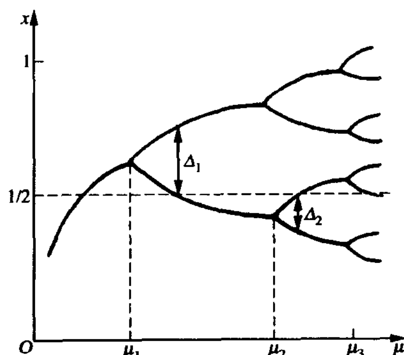


图 2.3 (2.1)式的周期倍分岔过程

§3 状态演化的物理过程——伸长(stretch)、扭转(twist)和折叠(fold)

前面我们已经看到非线性系统的多样性. 而这些状态又是不断变化的,我们的分析虽然并未用到描述演化的常微分方程、偏微分方程,而只用到一个简单的迭代函数关系式(2.1),但是因为它包含了状态演化的主要因素,即驱动、耗散和非线性,所以多样性的结论对比较复杂的系统也适用. 自然界状态的演化过程并不像直线那样平坦,而是曲折的. 驱动因素总要使系统离开原有的状态,而耗散因素

总要使系统保持整体结构,力图不要使状态演化得太远,非线性相互作用使状态更具有几何、拓扑上的多样性.下面我们仍用简单的例子,说明自然界状态演化的拓扑形态.

最简单的映射是帐篷映射:

$$x_{n+1} = \mathrm{T}(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leqslant x_n \leqslant 1/2, \\ 2 - 2x_n, & 1/2 < x_n \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.29}$$

锯齿映射:

$$x_{n+1} = \mathrm{S}(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leqslant x_n < 1/2, \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leqslant x_n \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.30}$$

这两个映射具有自然现象演变的一般特点——伸长和折叠.

帐篷映射的第一半是驱动状态的演变,它将原有的长度均匀伸长两倍.第二半是耗散因素,它不使状态演化到无穷,又将伸长的间隔折叠回来,因为一个 x_{n+1} 映射成两个不同的 x_n.这种伸长折叠的过程见图 2.4.

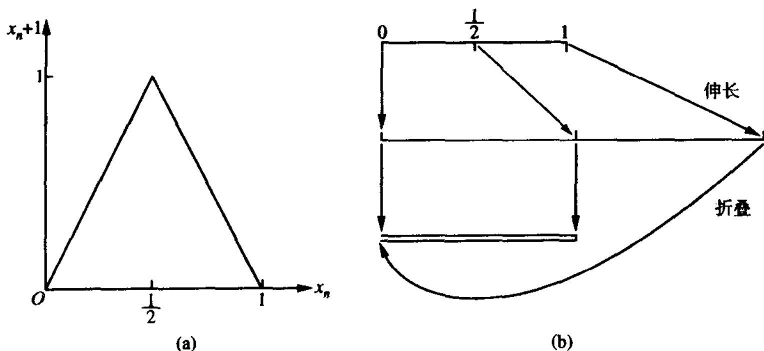


图 2.4 帐篷映射的伸长和折叠

对锯齿映射,我们可以将 x 看成角变数,将映射看成是在圆上的映射,x 从 0 到 1 相当于沿圆周转一圈.映射的前一半,是驱动圆均匀伸长到圆周长为原来两倍,而后一半是将其扭转成 8 字形,它的上轮和下轮就是原来长度的圆,再将上轮折叠下来使两个圆压在一起,见图 2.5.

这两个例子说明,每迭代一次,系统的状态都要经过伸长—扭转

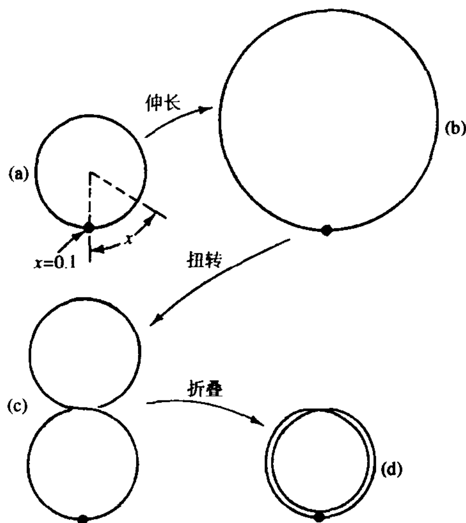


图 2.5 锯齿映射的伸长、扭转和折叠

—折叠这种过程变到新的状态. 把这种物理的过程分析出来，对研究状态变化是直观明显的.

上述的一维映射，反映出状态(点)在 x 轴上跳来跳去的状况. 现在我们举出二维映射，就可以看出流动状况.

折叠 Baker 映射：

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n, \\ y_{n+1} = y_n/2, \end{cases} \quad 0 \leqslant x_n < \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant y_n \leqslant 1;$$

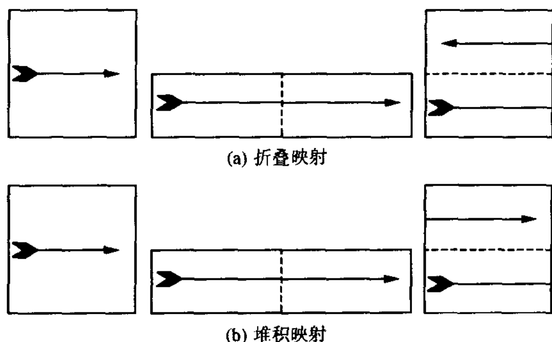
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2 - 2x_n, \\ y_{n+1} = 1 - y_n/2. \end{cases} \quad \frac{1}{2} \leqslant x_n < 1, \quad 0 < y_n \leqslant 1. \tag{2.31}$$

它将一个方块先压缩伸长，再折叠起来. 为了说明，我们在方块上画上流动的箭头. 从图上看出，映射以后，上下两个箭头相反，它表示，由流动引起的通量相消了，见图 2.6(a).

但是对于堆积 Baker 映射：

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) \to \begin{cases} (2x_n, y_n/2), & 0 \leqslant x_n \leqslant 1/2, \\ (2x_n - 1, (1 + y_n)/2), & 1/2 \leqslant x_n \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.32}$$

和折叠 Baker 映射的区别是：映射以后，上下两个半块是堆在一起，显然此时通量加倍了，见图 2.6(b).



(a) 折叠映射

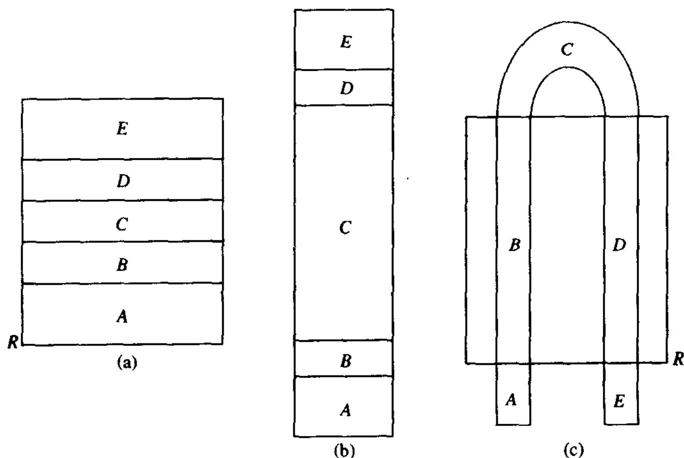
(b) 堆积映射

图 2.6　Baker 映射

著名的 Small 马蹄映射：

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) \to \begin{cases} \left(\dfrac{x_n}{3}, 3y_n\right), & 0 \leqslant y_n \leqslant 1/3, \\ \left(1 - \dfrac{x_n}{3}, 3(1 - y_n)\right), & 2/3 \leqslant y_n \leqslant 1, \end{cases}$$

通过伸长和折叠变成了一个马蹄，见图 2.7.



(a)　(b)　(c)

图 2.7　Small 马蹄映射

除了伸长、折叠、扭转的因子外,物理学上还有剪切(shear)因子.如下面是伸长、折叠、剪切三维映射:

$$(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})\to\begin{cases}\left(2x_n,\dfrac{y_n}{2},f\left(\dfrac{y_n}{2}\right)\right), & 0\leqslant x_n<1/2,\\ \left(2-2x_n,1-\dfrac{y_n}{2},f\left(1-\dfrac{y_n}{2}\right)\right), & 1/2\leqslant y_n\leqslant 1,\end{cases}\tag{2.33}$$

其中 $f(y)=y-\dfrac{1}{2}$.这一个映射首先是按伸长—折叠 Baker 映射(2.31 式),然后是剪切,见图 2.8.

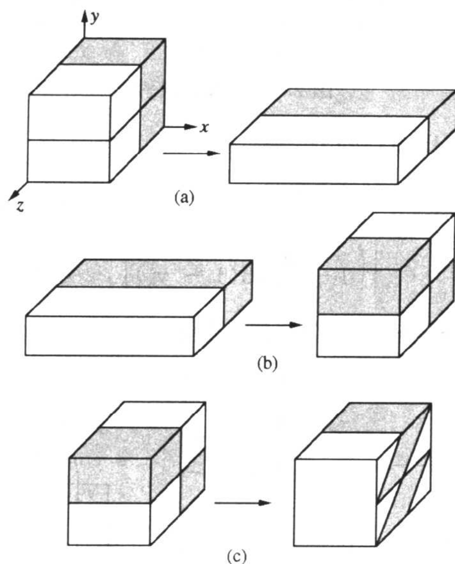


图 2.8　伸长—折叠—剪切映射

从上述几个简单的分段映射(非线性映射)中我们可以看出,系统状态演化的主要因子或几何实质是伸长、折叠、扭转和剪切.而传统动力学可以看成是几何上坐着不动或是在兜圈子.

§4 周期轨道和混沌

从(2.1)式表示的逻辑斯蒂映射可以看出,只有当该系统中的所有周期轨道均不稳定时,到 μ_∞时才出现混沌,见图 2.3. 所以说混沌中含有各种各样(不稳定)的周期轨道.

以(2.29)式表示的帐篷映射和(2.30)式表示的锯齿映射为例,$T^2(x)$和 $T^m(x)$的图像见图 2.9,$S^2(x)$和 $S^m(x)$的图像见图 2.10.

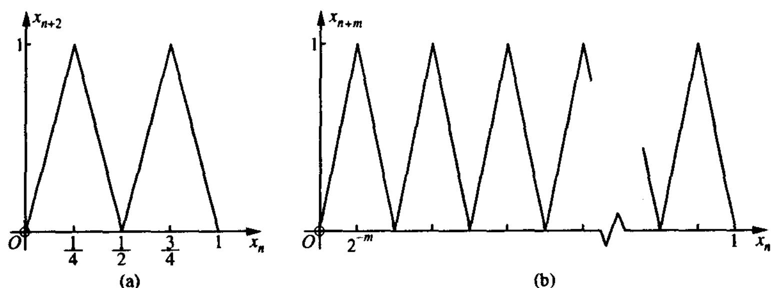


图 2.9 帐篷映射的二次迭代(图(a))和 m 次迭代(图(b))

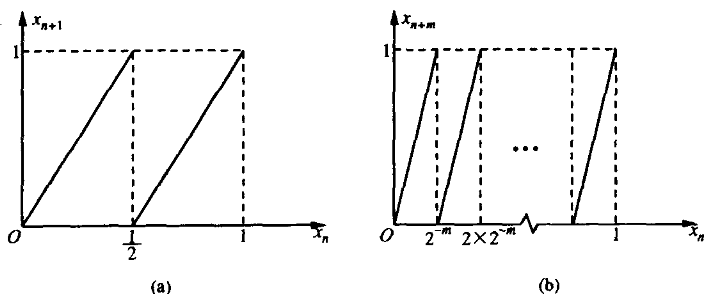


图 2.10 锯齿映射的二次迭代(图(a))和 m 次迭代(图(b))

从图 2.9 看出,$T^2(x)$和 $y=x$ 有四个交点,除去 $x=0$ 和 $x=\frac{2}{3}$ 两个周期 1 的交点外,周期 2 解是 $x=\frac{2}{5}$和 $x=\frac{4}{5}$. $S^2(x)$和 $y=x$ 也有四个交点,除去 $x=0$ 和 $x=1$ 两个周期 1 的交点外,周期 2 解是

$x=\frac{1}{3}$和 $x=\frac{2}{3}$. 显然对周期 1 解的斜率 $|\lambda|=2$，对周期 2 解的斜率 $|\lambda|=4$，因此都是不稳定的周期解.

假如我们以二进制数

$$x_0 = 0.a_1a_2a_3a_4\cdots \tag{2.34}$$

作为迭代初值，其中 a_i 不是 0 就是 1，将 x_0 乘以 2，即相当于(2.34)式的小数点向右移动一位，即 $a_1.a_2a_3a_4\cdots$. 若 $x_0<\frac{1}{2}$，即 $a_1=0$，则移位后得到的就是所求的结果；若 $x_0\geqslant\frac{1}{2}$，即 $a_1=1$，那么减去 1 以后的结果是

$$x_1 = 0.a_2a_3a_4\cdots, \tag{2.35}$$

因此，锯齿映射就等价于每次小数点向右移动一位的移位映射.

而帐篷映射的 $2-2x_0=1-(2x_0-1)=1-\mathrm{S}(x_0)$ 则相当于将(2.35)式的数字 1 变成 0，数字 0 变成 1. 例如若 $x_0=0.101101$，则 $2x_0=1.01101$，$2-2x_0=0.10010$.

我们可以利用二进制表达式构造锯齿映射的周期轨道. 例如若

$$x_0 = 0.1010101010\cdots = \frac{2}{3} = 0.\underline{10},$$

该序列中的"10"是无限循环的(在数字 10 下画横线表示)，它就是锯齿映射周期 2 的初条件，将它代入(2.30)式便得到

$$x_1 = 0.010101010101\cdots = \frac{1}{3} = 0.\underline{01},$$

它是"01"无限循环的. 所以(2.30)式表示的锯齿映射的周期 2 轨道为$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\cdots\right)$.

又例如若 $x_0=0.100100100100100\cdots=\frac{4}{7}=0.\underline{100}$，将它代入(2.30)式便得到

$$x_1 = 0.001001001001001001\cdots = \frac{1}{7} = 0.\underline{001},$$

$$x_2 = 0.010010010010010010\cdots = \frac{2}{7} = 0.\underline{010},$$

所以，锯齿映射的周期 3 轨道为$\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7},\cdots\right)$.

一般若 $x_0=0.a_1a_2a_3a_4\cdots a_p$，且以 P 个二进制数重复构成循环，那么它就是锯齿映射周期轨道上的一个周期 P 的点.

现在我们利用(2.30)式表示的锯齿映射的周期点，能否求(2.29)式表示的帐篷映射的周期点呢？

下面我们说明，若 w_0 是锯齿映射的周期 P 点，即

$$w_0 = \mathrm{S}^P(w_0), \tag{2.36}$$

那么

$$x_0 = \mathrm{T}(w_0) \tag{2.37}$$

就是帐篷映射带有同样周期的周期点，即 $x_p=x_0$.

下面我们先来说明两个映射之间的关系：

$$\mathrm{TT}(x) = \mathrm{TS}(x), \tag{2.38}$$

其左边为

$$\mathrm{T}(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{T}(2x) = 4x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.25,$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{T}(2x) = 2-4x, \quad 0.25 < x \leqslant 0.5,$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{T}(2-2x) = -2+4x, \quad 0.5 < x \leqslant 0.75,$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{T}(2-2x) = 4-4x, \quad 0.75 < x \leqslant 1,$$

(2.38)式的右边为

$$\mathrm{T}(\mathrm{S}(x)) = \mathrm{T}(2x) = 4x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.25,$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{S}(x)) = \mathrm{T}(2x) = 2-4x, \quad 0.25 < x \leqslant 0.5,$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{S}(x)) = \mathrm{T}(2-2x) = -2+4x, \quad 0.5 < x \leqslant 0.75,$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{S}(x)) = \mathrm{T}(2-2x) = 4-4x, \quad 0.75 < x \leqslant 1,$$

因此证实了(2.38)式.

由(2.38)式很容易得到

$$\mathrm{TTT}(x) = \mathrm{TTS}(x) = \mathrm{TSS}(x), \tag{2.39}$$

它说明 T 的 N 次迭代与 S 的 $N-1$ 次迭代接着一次 T 迭代等价.

现在证明 $x_P=x_0$，将 x_0 迭代 P 次，即

$$x_P = \mathrm{T}^P(x_0) = \mathrm{T}^P(\mathrm{T}(w_0)) = \mathrm{T}^{P+1}(w_0)$$
$$= \mathrm{TS}^P(w_0) = \mathrm{T}(w_0) = x_0,$$

得证.

例如 $w_0=\dfrac{1}{7}$ 是(2.30)式表示的锯齿映射的周期 3 点，那么 $x_0=$

$\frac{2}{7}=T\left(\frac{1}{7}\right)$就是帐篷映射((2.29)式)的周期3点.事实上，将$x_0=\frac{2}{7}$代入(2.29)式有$x_1=\frac{4}{7}$，$x_2=\frac{6}{7}$，$x_3=\frac{2}{7}$.当然这里应当指出，为了保证P是最小的周期，即$x_0=x_m(m=1,2,3,\cdots,P-1)$，此时必须对$w_0$的二进制数字作一定的限制.

从上面的分析我们看到，帐篷映射((2.29)式)和锯齿映射含有各种各样的周期轨道，这些周期轨道都是不稳定的，因而只能是混沌，这是判别混沌的标志.所以混沌中隐藏着许多周期轨道，尤其是周期2、周期3、周期5，这些轨道反映混沌演化的特性.

前苏联科学家沙尔可夫斯基(Sharkovsky)论证了一维映射$x_{n+1}=f(x_n)$存在下列自然数列：

$$\begin{cases}\text{第一排是从 3 开始的奇数：}\\ \qquad 3,5,7,9,11,13,15,\cdots;\\ \text{第二排=第一排}\times 2\text{：}\\ \qquad 6,10,14,18,22,26,30,\cdots;\\ \text{第三排=第一排}\times 4\text{：}\\ \qquad 12,20,28,36,44,52,60,\cdots;\\ \text{最后一排=递减方式 2 的幂：}\cdots,64,32,16,8,4,2,1.\end{cases}\tag{2.40}$$

他证明，如果系统有周期为某数的解，那么这个系统一定有数列(2.40)中排在这个数后面的那些数的周期解.例如逻辑斯蒂映射((2.1)式)有周期4的解，那么它一定有周期2和周期1解.若映射中有周期3的解，那么按照(2.40)式，该系统就存在一切数目的周期解. Li(李天岩)和Yorke合写了一篇文章，名为“周期3意味着混沌”，就是这个含义.

例如下列映射：

$$x_{n+1}=f(x_n)=\begin{cases}3x_n, & 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{3},\\ \frac{17}{9}-\frac{8}{3}x_n, & \frac{1}{3}\leqslant x_n\leqslant\frac{2}{3},\\ \frac{1}{9}, & \frac{2}{3}\leqslant x_n\leqslant 1,\end{cases}\tag{2.41}$$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=1$，$f(1)=\frac{1}{9}$，所以 $x=\frac{1}{9}$ 是周期 3 点，按照李-Yorke 定理，(2.41)式有混沌.

§5 线性和非线性敏感初条件的区别

在逻辑斯蒂映射((2.1)式)的 $\mu>\mu_\infty=3.57$ 时以及帐篷映射((2.29)式)、锯齿映射((2.30)式)都出现了混沌，此时初始条件稍有一点差别，那么迭代多次后，最终差别就比较大了. 虽然这种差别数值并不一定很大，但是要问 n 次(n 较大)迭代后，x_n 是什么值，那就答不上来了，这正是图 1.1 的结果.

我们以两个二进制数作为初值，它们仅在第六位数上相差一点，

$$x_0=0.0101101011100011001,\quad x_0'=0.0101111011100011001,$$

那么用锯齿映射(2.30)迭代 5 次后的结果为

$$x_1=0.101101011100011001,\quad x_1'=0.1011101110001101;$$

$$x_2=0.01101011100011001,\quad x_2'=0.01111011100011001;$$

$$x_3=0.1101011100011001,\quad x_3'=0.1111011100011001;$$

$$x_4=0.101011100011001,\quad x_4'=0.111011100011001;$$

$$x_5=0.01011100011001,\quad x_5'=0.11011100011001.$$

可以看出 $x_5<\frac{1}{2}$，但 $x_5'=x_5+\frac{1}{2}$. 五次迭代后两者的差别达到 $\frac{1}{2}$. 由于帐篷映射和锯齿映射每迭代一次，二进制的有效数字就丧失一位，因此若从第 100 位有差别的两个几乎完全相同的二进制数，即两个数相差 2^{-100} 开始，迭代 100 次以后，因为我们并不知道第 100 位以后的数字 $a_{101},a_{102},a_{103},\cdots$，可以想像有人在投掷硬币(正面算 1，反面算 0)来决定 $a_{101},a_{102},a_{103},\cdots$ 等. 因此迭代 100 次以后所有的有效数字全丧失尽，结果只能是随机的混沌.

混沌的这种性质叫敏感初条件. 但是对如下的线性系统：

$$x_{n+1}=2x_n,\tag{2.42}$$

它也敏感于初条件，初始条件有一定的差别，最终的差别会在计算机上溢出. 所以线性系统(2.42)式决不会有混沌. 但是对非线性系统而

言,这种敏感初条件不会导致溢出,而是导致不知道确切的结果是什么.

我们还要指出,非线性逻辑斯蒂映射(2.1)式中参数 μ 代表驱动力和耗散力的相对大小. μ 小时,驱动力相对耗散力而言较小. μ 大时(例如 $\mu>3.57$),驱动力相对耗散力则可以相对抗. 不管 μ 的大小,每次迭代都要伸长、折叠. 为什么初始条件的差别在稳定的周期1解(不动点)和稳定的周期 P 解中不会放大,而在混沌解中却会放大呢?

我们考虑初值有一点差别 δx_0,对迭代映射 n 次迭代后的影响,显然

$$\begin{aligned}\delta x_n &= |f'(x_{n-1})| \cdot \delta x_{n-1} = |f'(x_{n-1})| \cdot |f'(x_{n-2})| \cdot \delta x_{n-2} = \cdots \\ &= |f'(x_{n-1})| \cdot |f'(x_{n-2})| \cdot \cdots \cdot |f'(x_0)| \cdot \delta x_0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\delta x_n}{\delta x_0} &= \frac{\delta x_n}{\delta x_{n-1}} \cdot \frac{\delta x_{n-1}}{\delta x_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{\delta x_1}{\delta x_0} \\ &= |f'(x_{n-1})| \cdot |f'(x_{n-2})| \cdot \cdots \cdot |f'(x_0)| \\ &= e^{\mathrm{LE}\cdot n},\end{aligned} \tag{2.43}$$

其中

$$\mathrm{LE} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)| \tag{2.44}$$

称为 Lyapunov 指数. 显然,它是 n 次迭代误差变化的一个平均值.

虽然对稳定的周期1(不动点)或者其他稳定的周期解,可能在少数几个迭代时有 $|f'(x_i)|>1$,但平均讲, $|f'(x_i)|<1$ 的迭代次数较多,因而平均起来 LE<0. 但是对混沌而言, μ_∞ 前面的所有周期解均不稳定,即 $i=0,1,2,\cdots,n$ 时 $|f'(x_i)|$ 均大于1,因而平均起来,LE>0,所以混沌敏感初条件就是指 LE>0. 也就是说, μ 小时,驱动因素相对于耗散因素为小,伸长与折叠,最终还是折叠占上风,使状态趋向周期1的解和其他周期解. 只有当 $\mu>3.57$,驱动因素和耗散因素可相比较时,此时多次伸长与折叠的结果,对初条件敏感,产生了混沌.

§6 多尺度和 Feigenbaum 常数

(2.1)中参数 $\mu>3.57$ 时出现了混沌，此时周期倍分岔所出现的各种周期均是不稳定的. 但是它们在混沌轨道中还打上了各种周期轨道的烙印，周期愈大，代表的尺度愈小，即它们将[0,1]区间分成的小段愈多. 或者说，通过不断的伸长与折叠而形成大大小小不同的尺度，因而混沌的轨道是多尺度现象的反映. $\mu<3.57$ 时不出现混沌. $\mu=3.57$ 时混沌就出现了，这使我们联想到物理学上的相变，水到 100 ℃就开了，但小于 100 ℃，水就不开. 在临界点各种尺度的涨落都有它们非常敏感于温度的小的变化. 但是却存在和尺度无关的不变常数(如 100 ℃).

从图 2.1 周期倍分岔过程看出，若考察相邻两个分岔点之间的参数距离 $\mu_{n+1}-\mu_n$，Feigenbaum 发现，当 n 很大时，前面两个分岔点参数之间的距离是后面两个分岔点参数之间距离的 4.669 倍，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta=4.669\cdots, \tag{2.45}$$

而且还发现，周期 2 状态两个"儿子"之间的距离是"孙子"之间距离的 2.5 倍，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha=2.5\cdots. \tag{2.46}$$

参数 μ 的尺度每次以 δ 倍减小，d 的尺度每次以 α 倍减小，n 次之后尺度分别为 $\frac{1}{\delta^n}$ 和 $\frac{1}{\alpha^n}$. 大小尺度差好多个数量级，当然是无特征尺度现象.

在这个多尺度系统中，尺度由 $\mu_n-\mu_{n-1}$ 变成了 $\mu_n-\mu_{n-1}$ 的 $\frac{1}{\delta}$ 倍，周期的个数则由 1 变成了周期 2. "儿子"尺度变成了"孙子"尺度，函数 $f(x)$ 则变成了 $f^2(x)$，见图 2.11.

故存在两个自相似的关系

$$N[\delta(\mu_n-\mu_{n-1})]=\frac{1}{2}N(\mu_n-\mu_{n-1}), \tag{2.47}$$

$$g(x)=-\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right), \tag{2.48}$$

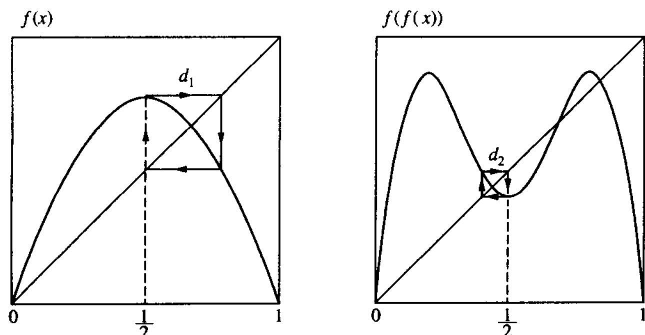


图 2.11　$f^1(x)$和 $f^2(x)$图像

其中 N 是周期数目，$g(x)$是 f^n 的极限过程.

因为(2.45)式显示为等比级数，所以级数和为

$$(\mu_n-\mu_{n-1})+(\mu_{n+1}-\mu_n)+\cdots=\mu_\infty-\mu_{n-1}=\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{1-\dfrac{1}{\delta}},$$

$$(\mu_{n+1}-\mu_n)+(\mu_{n+2}-\mu_{n+1})+\cdots=\mu_\infty-\mu_n=\frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{1-\dfrac{1}{\delta}}.$$

所以(2.47)式也可以改写为

$$N[\delta(\mu_\infty-\mu_n)]=\frac{1}{2}N(\mu_\infty-\mu_n),\tag{2.49}$$

将(2.49)式中的$\frac{1}{2}$写成 $\delta^{-\tau}$形式，那么(2.49)式的解为

$$N[(\mu_\infty-\mu_n)]=(\mu_\infty-\mu_n)^{-\tau},\tag{2.50}$$

其中

$$\tau=\frac{\ln 2}{\ln\delta}=0.45.\tag{2.51}$$

将(2.50)式代入(2.49)式的左右两边而成为恒等式，所以对多尺度混沌映射(2.1)，$\tau=\frac{\ln 2}{\ln\delta}$ 是一个不变量.

方程(2.48)比起(2.49)式来求解就困难多了，目前仍然无法求到精确解，只能求近似解. 设

$$g(x)=c_\infty-x^2,\tag{2.52}$$

将(2.52)式代入(2.48)式得

$$c_\infty - x^2 = -\alpha\left[c_\infty - \left(c_\infty - \left(-\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)^2\right]$$

$$= -\alpha\left[c_\infty - \left(c_\infty^2 - 2c_\infty\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^4}{\alpha^4}\right)\right]$$

$$= (-\alpha c_\infty + \alpha c_\infty^2) - 2c_\infty\frac{x^2}{\alpha} + O(x^4),$$

比较上式两边的常数项和 x^2 项次系数得

$$c_\infty = -\alpha(c_\infty - c_\infty^2),\quad \alpha = 2c_\infty.$$

因此求到

$$\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0, \tag{2.53}$$

解得

$$\alpha = 1 \pm \sqrt{3}. \tag{2.54}$$

取+号得 $\alpha=1+\sqrt{3}=2.732$,它和实际值 $\alpha=2.5$ 相差不大,因而 α 又是该多尺度系统的另外一个不变量.

§7 概率密度的演化

混沌的结果是随机的,但是它的统计特征,如概率密度,有无规律可循呢?

在逻辑斯蒂映射(2.1)式中,取 $\mu=4$,得到

$$y = x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) = f(x_n), \tag{2.55}$$

那么由初始值 x_0 开始迭代得到的混沌轨道

$$x_0, x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$$

是无规则的.问题是当迭代次数 n 增加后,由上述混沌轨道所统计出的概率密度 $\rho(x)$在区间[0,1]上是如何演化的呢?

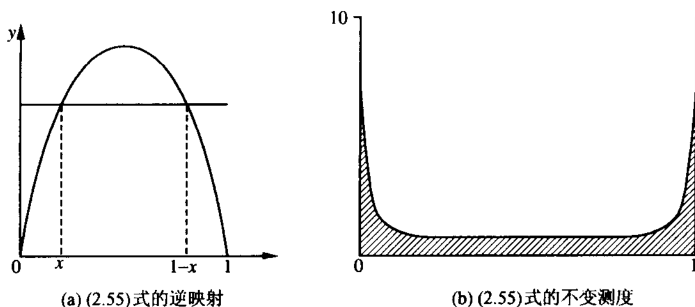
对映射(2.55)式的纵坐标上一个点 y,它的逆映射对应 x 轴上的两个点 x 和 $1-x$,见图 2.12(a).

因此

$$\Delta y = |f'(x)| \cdot \Delta x_1,\quad \Delta y = |f'(1-x)| \cdot \Delta x_2, \tag{2.56}$$

其中 Δx_1 和 Δx_2 分别是点 x 和 $1-x$ 的一个小变化区间.

因此落在间隔 Δy 上的概率等于落在 Δx_1 间隔上的概率加上落



(a) (2.55)式的逆映射

(b) (2.55)式的不变测度

图 2.12

在间隔 Δx_2 上的概率之和，即

$$P(\Delta y) = P(\Delta x_1) + P(\Delta x_2) = \rho(x)\Delta x_1 + \rho(1-x)\Delta x_2.$$

将(2.56)式代入上式得到

$$\rho(y)\Delta y = \rho(x)\,\frac{\Delta y}{|f'(x)|} + \rho(1-x)\,\frac{\Delta y}{|f'(1-x)|},$$

两边消去 Δy 得到

$$\rho(y) = \rho(x)\,\frac{1}{|f'(x)|} + \rho(1-x)\,\frac{1}{|f'(1-x)|}. \tag{2.57}$$

由(2.55)式解得

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{2}, \quad |f'(x)| = 4|1-2x| = 4\sqrt{1-y}, \tag{2.58}$$

所以(2.57)式右端变成

$$\psi\rho(y) = \frac{1}{4\sqrt{1-y}}\left[\rho\left(\frac{1-\sqrt{1-y}}{2}\right) + \rho\left(\frac{1+\sqrt{1-y}}{2}\right)\right], \tag{2.59}$$

方程(2.59)称为 Frobenius-Perron 方程，简称 F-P 方程. ψ 称为 Frobenius-Perron 算子. 这样，若用初始密度 ρ_0 迭代，则 $\rho_1=\psi\rho_0,\cdots$，$\rho_{k+1}=\psi\rho_k$，则概率密度就是按 $\rho,\psi\rho,\psi^2\rho,\cdots$ 演化，当 k 很大时则趋向于方程

$$\psi\rho = \rho \tag{2.60}$$

的不动点，它称为不变测度.

注意 Frobenius-Perron 方程(2.59)的解是

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}. \tag{2.61}$$

事实上,将(2.61)式代入(2.57)式的左端,得

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\rho(y)=\rho[4x(1-x)]=\frac{1}{\pi\sqrt{4x(1-x)[1-4x(1-x)]}}\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{4x(1-x)(2x-1)^2}}=\frac{1}{2\pi|2x-1|\sqrt{x(1-x)}},\end{aligned}$$

将(2.61)式代入(2.57)式的右端,得

$$\begin{aligned}\text{RHS}&=\frac{\rho(x)}{|f'(x)|}+\frac{\rho(x)}{|-f'(x)|}=\frac{2\rho(x)}{|f'(x)|}\\&=\frac{2}{\pi\cdot 4|2x-1|\sqrt{x(1-x)}}\equiv\text{LHS}.\end{aligned}$$

有了不变测度 $\rho(x)$ 以后,此时时间平均的 Lyapunov 指数((2.44)式)就可以写成以 $\rho(x)$ 加权的总体平均:

$$\text{LE}=\int_0^1\rho(x)\ln|f'(x)|\mathrm{d}x. \tag{2.62}$$

现在我们对(2.55)式来计算 LE. 首先我们注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1\rho(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\sin^2\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin^2\theta)}{\pi\sin\theta\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}\theta=1,\end{aligned} \tag{2.63}$$

则

$$\begin{aligned}\text{LE}&=\int_0^1\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\ln|4-8x|\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{\ln 2^2+\ln|1-2x|}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\ln 2+2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $1-2x=\sin\theta$,且 $[\sin^{-1}(1-2x)]'=\frac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{x(1-x)}}$,

则

$$\text{LE}=2\ln 2+2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin\theta)\mathrm{d}[-\sin^{-1}(1-2x)]$$

$$= 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin\theta)\mathrm{d}(-\theta) = 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)$$

$$= \ln 2. \tag{2.64}$$

同样，若按(2.44)式计算，令

$$x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right),\quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2.65}$$

则逻辑斯蒂映射(2.55)式就化为

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_{n+1}\right) = \sin^2\left[2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\right],$$

即

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \leqslant y_n \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2(1-y_n), & \frac{1}{2} < y_n \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.66}$$

(2.65)式就是帐篷映射(2.29)式. 故由(2.44)式得

$$\mathrm{LE} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)| = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln 2$$

$$= \frac{1}{n}n\ln 2 = \ln 2, \tag{2.67}$$

(2.64)式和(2.67)式相等，正说明时间平均((2.67)式)等于总体平均((2.62)式). 此时该系统是各态历经的.

习　题

1. 对逻辑斯蒂映射，取 $\mu=0.5$，2.0 和 $\mu=3.2$，尝试用作图法求定常状态和周期 2 状态.

2. 编程序，对逻辑斯蒂映射绘制以参数 μ 为横坐标、状态为纵坐标的分岔图.

3. 用几乎相同的初始条件 x_0 和 x_0'，对系统 $x_{n+1}=4x_n$ 和系统 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$，绘制出迭代结果 x_n 随 n 的变化曲线.

4. 对一维映射

$$x_{n+1}=\begin{cases}3x_n, & 0\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{3},\\[2mm] \dfrac{3}{2}(1-x_n), & \dfrac{1}{3}\leqslant x_n\leqslant 1,\end{cases}$$

求出周期 1 和周期 2 解,并判断它们的稳定性.

5. 对一维映射

$$x_{n+1}=x_n^3+\mu x_n,$$

讨论 μ 在什么样的 $\mu_1<\mu<\mu_2$ 范围内不动点 $x=0$ 是稳定的,求出 μ_1 和 μ_2,在 μ_1 和 μ_2 处发生分岔吗?并说明周期 2 解满足什么方程.

6. 求映射 $x_{n+1}=2x_n^2-5$ 的周期 1 和周期 2 解.

7. 对一维映射 $x_{n+1}=\mu x_n-x_n^3$,求出不动点,说明对什么 μ 值,这个不动点存在.并证明周期 2 的解满足方程

$$x(x^2-\mu+1)(x^2-\mu-1)(x^4-\mu x+1)=0.$$

8. Fibonacci 数满足下列映射:

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,$$

$x_0=0,x_1=1$. 试证明 $y_n=\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$满足方程 $y_{n+1}=\dfrac{1}{1+y_n}$,且当 $n\to\infty$时,$y_n\to\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$.

9. 映射 $y_{n+1}=1-by_n^2$ 在作变换 $x_n=\left(\dfrac{\mu}{4}-\dfrac{1}{2}\right)y_n,b=\dfrac{\mu^2}{4}-\dfrac{\mu}{2}$时,则化为逻辑斯蒂映射 $x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)$,试说明之.

10. 找出下列映射的不动点:

$$x_{n+1}=\frac{1-x_n}{1+\mu x_n},$$

其中 $\mu>0,x_n\neq-\dfrac{1}{\mu}$.

11. 映射

$$x_{n+1}=x_n\left[\frac{\mu}{x_n^2+(\mu-x_n^2)\mathrm{e}^{-4\pi\mu}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

有不动点 $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{\mu}$,问在何处发生分岔?

12. 证明映射 $x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)$的周期 3 解 x_1,x_2,x_3 满足如下方程:

$$\mu^6x^6-(3\mu+1)\mu^5x^5+(3\mu+1)(\mu+1)\mu^4x^4$$
$$-(\mu^3+5\mu^2+3\mu+1)\mu^3x^3+(2\mu+1)(\mu^2+\mu+1)\mu^2x^2$$
$$-(\mu+1)(\mu^2+\mu+1)\mu x+(\mu^2+\mu+1)=0.$$

13. 找出 Henon 映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=1+y_n-ax_n^2, \\ y_{n+1}=bx_n, \quad -1<b<1, \end{cases}$$

的周期 1 解和周期 2 解.

(提示:周期 2 解满足方程

$[ax^2+(1-b)x-1][a^2x^2-a(1-b)x+(1-b)^2-a]=0.$)

第三章　三维相空间的轨道

第二章我们已经看到，在离散的一维映射中就有混沌，这是 300 年以来都认为不可思议的. 因为我们过去只知道迭代映射只收敛到一个定常解，根本不了解还有周期解和混沌解. 同样，对于由牛顿第二定律描述的连续动力系统，还会不会发生意想不到的混沌结果呢？答案是肯定的. 我们不能用传统的定量求微分方程解的方法，而是采用定性分析方法，分析系统中驱动力和耗散力的相互竞争.

§1　相(状态)空间

混沌是非线性现象，用传统的求解非线性微分方程的办法来分析混沌几乎是不可能的. 在空间中用几何图像的方法来分析更有效.

大家知道，经典的力学和物理学是建立在牛顿力学基础上的. 若用 x 表示质点所在的位置，那么 x 对时间 t 的一阶微商 $\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 就表示质点的速度. 而速度对时间 t 的一阶微商，或者位置对时间的二阶微商，$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 就表示质点的加速度. 那么单位质量的质点的牛顿第二定律即可表示成

$$\ddot{x}=F, \tag{3.1}$$

其中 F 是质点所受的力.

因此，用位置 $x(t)$ 和速度 $\dot{x}(t)$ 就完全描述了系统的状态，那么在平面 (x,y) 上的点就代表这个状态. 我们就称 (x,y) 是状态的二维空间或者二维相空间，或者叫相平面.

一般由 x 和 y 随时间的变化就构成了一阶微分方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y),\\ \dot{y}=g(x,y).\end{cases} \tag{3.2}$$

此时，x 和 y 有比较广的意义. 若 x 和 y 分别代表真正的 x 坐标和 y

坐标位置,那么 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 就代表 x 方向速度和 y 方向速度. 此时,(3.2)式就称为二维速度场. 当然,x 和 y 也可以代表描述该系统状态的其他变量(如温度和压力). 同样,三维速度场也可以表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y,z),\\ \dot{y}=g(x,y,z),\\ \dot{z}=h(x,y,z).\end{cases}\tag{3.3}$$

由于(3.2)式和(3.3)式的右端并不明显地出现时间变量 t,所以就分别称它们为二维和三维自治动力系统. 若 x,y,z 分别表示三个方向上的位置,那么(3.3)式代表的三维速度场和时间无关,此时称速度场是定常的,也称(3.3)式是自治动力系统,也就是定常三维速度场.

对于非自治动力系统,我们总可以化成自治动力系统,例如

$$\ddot{x}+x=A\cos(\omega t),\tag{3.4}$$

令 $\dot{x}=y, z=\omega t$,(3.4)式化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x+A\cos z,\\ \dot{z}=\omega,\end{cases}\tag{3.5}$$

(3.5)式则是一个三维自治动力系统.

又如

$$\begin{cases}\dot{u}=f(u,v,t),\\ \dot{v}=g(u,v,t),\end{cases}\tag{3.6}$$

令 $w=t$,则化为

$$\begin{cases}\dot{u}=f(u,v,w),\\ \dot{v}=g(u,v,w),\\ \dot{w}=1,\end{cases}\tag{3.7}$$

它就是三维自治动力系统.

在相空间 (x,y,z) 的点代表状态,而状态随时间演化,在相空间 (x,y,z) 中绘出曲线并用箭头表示时间前进方向,就表示轨迹,它的切线方向代表速度方向,系统状态是沿轨道变化的.

由于三维定常速度场(3.3)式右端不显含时间t,因此在相空间(x,y,z)的一个点上只有一个速度$(u,v,w)\equiv(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$通过.不可能同时有两条轨迹通过同一个点.除了速度场为零的点,此时该点速度向量为零,因而轨道在该点终止,或者从该点出发,但没有轨道通过.

§2 保守系统、耗散系统和吸引子

保守系统一般指总能量不随时间变化的系统.例如,无阻尼的单摆方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}+x=0,\\ \ddot{x}+\sin x=0,\end{cases}\tag{3.8}$$

其中第一式表示小振幅单摆,第二式表示大振幅单摆.将(3.8)第一式乘以$\dot{x}$得

$$\dot{x}\ddot{x}+x\dot{x}=0,$$

积分上式得到

$$H(x,y)=\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=\text{常数},\tag{3.9}$$

其中$\dot{x}=y$.

(3.8)第一式可以化为二维自治动力系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=y\equiv\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y},\\ \dot{y}=-x\equiv-\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x},\end{cases}\tag{3.10}$$

其中$H(x,y)$称为系统的 Hamilton 量.

若将$\dot{x}$和$\dot{y}$看成是速度向量$\boldsymbol{v}=(u,v,w)$的二维速度场的两个分量$\boldsymbol{v}=(u,v)$,则速度散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t},\tag{3.11}$$

表示流体流出去的体积量减去流进来的体积量.若$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$,表示流出去的等于流进来的,则表示保守系统;若$\mathrm{div}\boldsymbol{v}<0$,表示流出去的比流进来的少,因此是耗散系统.例如,对无阻尼的单摆,其方程为

(3.8)第一式或者第二式,有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

所以它是一个保守系统,即表示相空间体积 V 在运动过程中是不变的.

但是若是有阻尼的单摆,其方程为

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = 0, \tag{3.13}$$

其中 $\alpha\dot{x}$表示阻力.(3.13)式也可以化为二维自治动力系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - x.\end{cases} \tag{3.14}$$

此时速度散度

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -\alpha < 0,$$

因此(3.13)式是耗散系统.

对耗散系统,在经过很长时间以后,状态的归宿称为耗散系统的吸引子,该吸引子在相空间中是点或曲线,也就是说,耗散系统集中研究系统长时间的行为.

§3　定常状态(平衡态)

对一个非线性动力系统而言,要求其解是非常困难的,我们只讨论定常状态,它是非常简单的.所谓定常状态,就是此状态不随时间变化,对(3.3)式而言,就是令右端为零:

$$\begin{cases}f(x,y,z) = 0, \\ g(x,y,z) = 0, \\ h(x,y,z) = 0.\end{cases} \tag{3.15}$$

因此,求定常状态只需解一个非线性代数方程组.定常状态也称为平衡态.

首先,以一维动力系统

$$\dot{x}= f(x) = \mu x(1 - x) \tag{3.16}$$

为例.令(3.16)式右端为零,导得两个定常状态

$$x^* = 0 \quad 和 \quad x^* = 1. \tag{3.17}$$

若(3.16)式右端只有线性项 μx,则只有一个定常状态 $x=0$,这再一次说明,非线性动力系统的形态是多样的.(3.16)式是一个耗散系统,其右端第一项代表驱动力,第二项 $-\mu x^2$ 代表耗散力.为了判断两个力的大小,和讨论离散系统的(2.14)式相类似,我们给定常状态以小扰动量 δx_0,看这个扰动随时间的变化 $\delta\dot{x}$ 是离开定常状态(此时表示驱动力大)还是趋向于定常状态(此时表示耗散力大).由(3.16)式得到扰动量 δx 所满足的微分方程是

$$\delta\dot{x}= \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=x^*} \cdot \delta x, \tag{3.18}$$

(3.18)式是一个线性常微分方程,它有如下形式的解:

$$\delta x = \delta x_0 e^{\lambda t}, \tag{3.19}$$

其中 $\lambda=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x^*}$ 是(3.16)式右端的雅可比矩阵在定常解 $x=x^*$ 处的特征值,因此

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\lambda > 0, \quad \text{驱动力大于耗散力, } \delta x \text{ 随时间 } t \text{ 增加;} \\ &\mathrm{Re}\,\lambda < 0, \quad \text{驱动力小于耗散力, } \delta x \text{ 随时间 } t \text{ 减小.} \end{aligned} \tag{3.20}$$

当 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$时,驱动力使得 δx_0 随时间增加,即离开定常状态 $x=x^*$,此时称定常状态 x^* 是不稳定的;而当 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 时,耗散力使得 δx_0 随时间减小,即趋向定常状态,此时称定常状态 x^* 是稳定的.

对定常状态 $x=0$,

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \mu - 2\mu x\bigg|_{x=0} = \mu,$$

因此,由(3.20)式,当 $\mu<0$ 时(驱动力小于耗散力),定常状态 $x=0$ 是稳定的(也称吸引子);$\mu>0$ 时(驱动力大于耗散力),定常状态 $x=0$ 是不稳定的(也称排斥子).

对于定常状态 $x=1$,

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \mu - 2\mu x\bigg|_{x=1} = - \mu.$$

因此,从(3.20)式看出,当 $\mu<0$ 时,定常状态 $x=1$ 是不稳定的(也

称排斥子)；$\mu>0$ 时，定常状态 $x=0$ 是稳定的(也称吸引子). 图 3.1 是定常状态附近的轨迹.

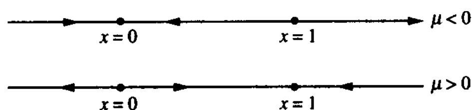


图 3.1 一维动力系统的定常状态及其轨迹

所以说，控制参数 μ 由 $\mu<0$ 到 $\mu>0$，定常状态 $x=0$ 由吸引子变成排斥子，而状态 $x=1$ 则由排斥子变成了吸引子. 因此，在控制参数 $\mu=0$ 处，系统的状态发生了分岔.

现在讨论二维自治动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)=ax+by,\\ \dot{y}=g(x,y)=cx+dy.\end{cases}\tag{3.21}$$

令(3.21)式右端为零，就得到系统的定常状态(0,0). 因为该系统是线性系统，所以只有一个定常状态.

将(3.21)第一式对时间微商一次，并用第二式代入得到

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=a\dot{x}+b\dot{y}=a\dot{x}+b(cx+dy)\\&=a\dot{x}+bcx+d(\dot{x}-ax)\\&=(a+d)\dot{x}+(bc-ad)x,\end{aligned}$$

这相当于一个二阶常微分方程

$$\ddot{x}-(a+d)\dot{x}-(bc-ad)x=0,\tag{3.22}$$

或简化为

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0,\tag{3.23}$$

其中

$$p=-(a+d),\quad q=-(bc-ad).$$

从物理学上讲，(3.23)式中 $\ddot{x}$ 代表加速度，$p\dot{x}$ 代表阻力，qx 代表恢复力. 显然它是一个耗散系统，因为此时的速度散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=(a+d)=-p<0,\tag{3.24}$$

和一维系统类似，测定驱动力和耗散力的大小由(3.21)或(3.23)式的特征值决定. (3.23)式所示系统的特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{3.25}$$

即(3.21)式右端在定常状态(0,0)处的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.26}$$

由(3.25)式解得

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{3.27}$$

因此定常状态(0,0)是否稳定,就要看(3.27)式的特征值的实部 Re λ 是否小于零. 在参数平面(p,q)上,根据 λ 的性质不同,定常状态(0,0)附近的轨道也不同,图3.2是参数平面(p,q)上定常状态附近的轨道及其相应的特征值.

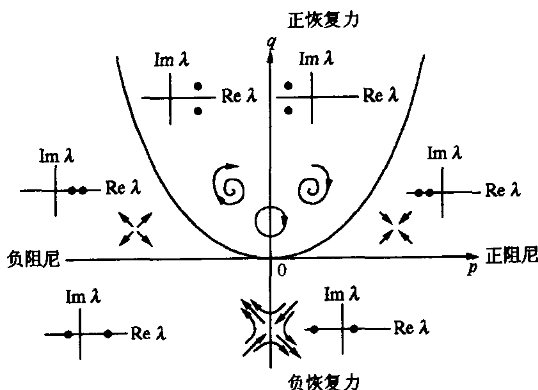


图3.2 参数平面(p,q)上不同区域内(0,0)附近的轨道

首先看参数平面(p,q)上的第一象限$(p>0,q>0)$. 由(3.23)式看出,该区域代表正阻尼和正恢复力. 区域中曲线 $p^2=4q$ 将区域分成两部分. 阻尼系数 p 较小时,由(3.27)式看出 λ 是共轭复根,实部为负. 按(3.19)式有

$$\delta x = \delta x_0 e^{\lambda t} = \delta x_0 e^{(\mathrm{Re}\,\lambda + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\lambda)t}$$
$$= \delta x_0 \cdot e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t}[\cos(\mathrm{Im}\,\lambda)t + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}\,\lambda)t], \qquad (3.28)$$

因为 $\mathrm{Re}\,\lambda<0$，所以定常状态(0,0)是稳定的吸引子，(0,0)附近的轨道螺旋振荡趋向于定常状态(0,0)，该点称为稳定的焦点(focus). 阻尼系数 p 较大的区域($p^2>4q$)，由(3.27)式看出 λ 是两个负实根($\lambda_{1,2}<0$)，因此，定常状态(0,0)是稳定的吸引子，其邻近的轨道从两个方向趋向于(0,0)，此时该点称为稳定的结点(node). 最形象的物理学个例是阻尼单摆，见方程(3.13). 下方的小球，当小球离开时，若在水中(阻尼较大)，小球很快以结点的方式在原点(0,0)处停下来；若在空气中(阻尼较小)，小球离开原点后以衰减振荡的方式慢慢地回到原点停下.

在参数平面(p,q)上的第二象限($p<0,q>0$)，它代表该区域为负阻尼和正恢复力. 曲线 $p^2=4q$ 将区域分成两部分：特征值为共轭复根且实部为正($|p|$较小)；特征值为两个正实数($|p|$较大). 此时，定常状态(0,0)都是不稳定的排斥子，分别称为不稳定的焦点和不稳定的结点，邻近的轨道分别是螺旋向外和两个方向向外. 应该指出，质点动力学中并不讨论负阻尼，但是实际的流场中是存在负阻尼的.

在参数平面(p,q)上的第三、四象限($q<0$)，它代表负恢复力情况. 此时(3.27)式的两个特征值 λ 为实数，一正一负. 定常状态(0,0)附近的轨道是一个向外，一个向内. 由于有正实根，使得定常状态(0,0)附近的扰动总会偏离(0,0)，所以定常状态(0,0)仍然是不稳定的，该点(0,0)称为鞍点(saddle).

对单摆方程(3.8)第二式，若用于单摆上方($x=\pm\pi$)的点，则 $\sin x$ 在 $x=\pm\pi$ 处展开，

$$\sin x = \sin x\Big|_{x=\pm\pi} + (\sin x)'\Big|_{x=\pm\pi}\cdot x = -x,$$

所以此处的单摆方程为 $\ddot{x}-x=0$，它就代表负恢复力的情况. 因此不管阻力是正是负，负恢复力情况下总是不稳定的鞍点. 在质点动力学中也不谈负恢复力. 实际上阿基米德浮力就是一种负恢复力.

特别要提一下第一、二象限交界处 $p=0$，在该线上无阻尼，此时 λ 为纯虚根，(0,0)点附近的轨线是闭合的，不会趋向原点. 此时

(0,0)称为中心点. 我们归纳如图3.3与图3.4.

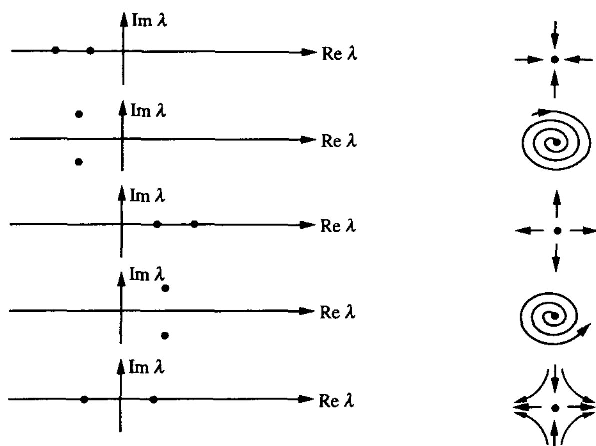


图 3.3

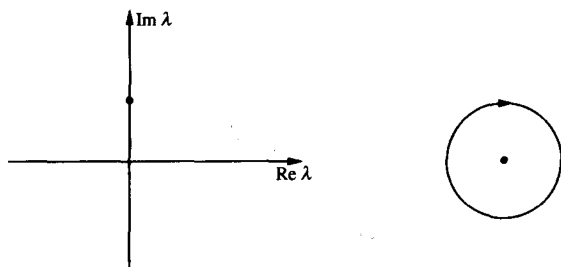


图 3.4

对(3.3)式所示的三维自治动力系统,它的平衡态的雅可比矩阵特征值满足三次方程

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.29}$$

若 $\Delta = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 < 0$,则三根为实根,其平衡态状况如图3.5;若 $\Delta = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^2 > 0$,则 λ 为一实根、两共轭复根,其平衡态状况如图3.6.

与(3.3)式,(3.29)式所对应的微分方程为

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \tag{3.30}$$

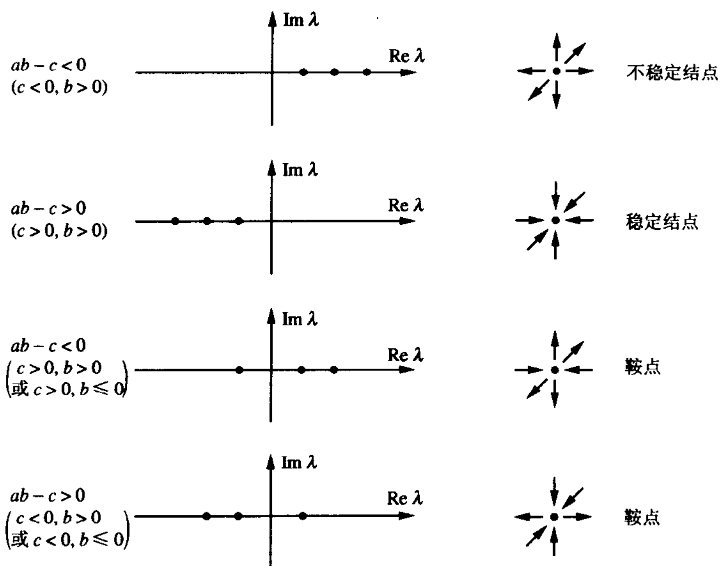

Im λ
Re λ
ab − c < 0
(c < 0, b > 0)
不稳定结点
ab − c > 0
(c > 0, b > 0)
稳定结点
ab − c < 0
(c > 0, b > 0
或 c > 0, b ≤ 0)
鞍点
ab − c > 0
(c < 0, b > 0
或 c < 0, b ≤ 0)
鞍点

图　3.5

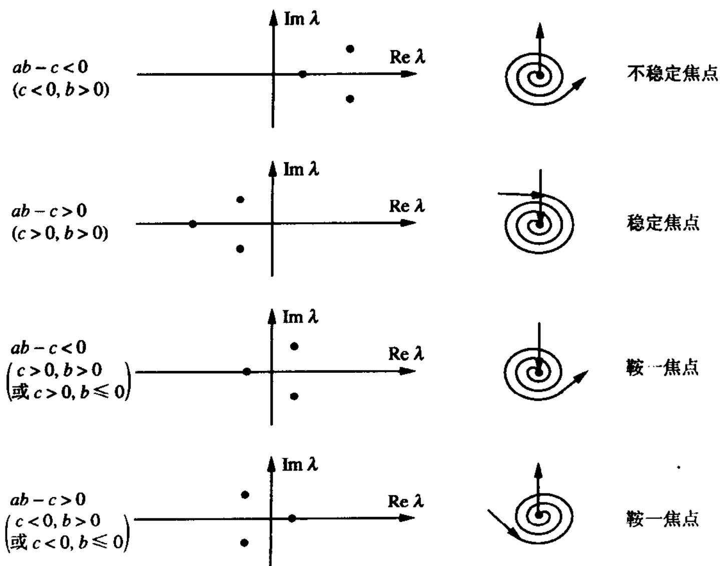

Im λ
Re λ
ab − c < 0
(c < 0, b > 0)
不稳定焦点
ab − c > 0
(c > 0, b > 0)
稳定焦点
ab − c < 0
(c > 0, b > 0
或 c > 0, b ≤ 0)
鞍一焦点
ab − c > 0
(c < 0, b > 0
或 c < 0, b ≤ 0)
鞍一焦点

图　3.6

或者

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-az-by-cx.\end{cases}\tag{3.31}$$

它的速度散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=-a=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

因此 $a>0$代表耗散系统,而 $a=0$ 代表保守系统.

若 $a=0$,则图 3.6 中,

$$\Delta=4b^3+27c^2>0,\tag{3.32}$$

因此,出现鞍—焦点要求 $-c<0$ 或 $-c>0$,所以保守系统也可以出现鞍—焦点.

鞍点无论是保守系统还是耗散系统都可以有.

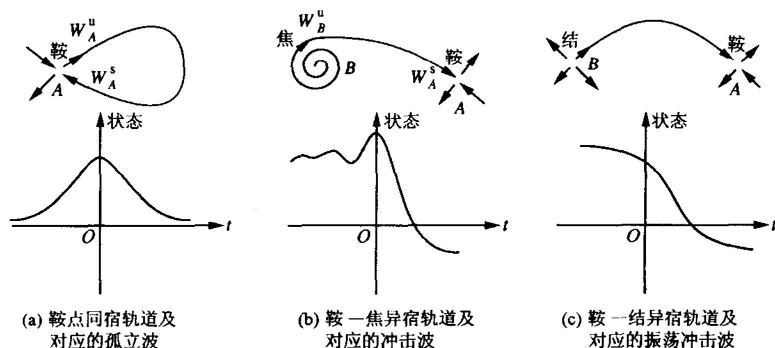
§4 同(异)宿轨道

前面两节我们只是分析了保守系统和耗散系统中平衡态的类型及相应的轨迹.实际的非线性动力系统一定有多种不同的平衡态,还有周期态(一般称为极限环,它的轨迹是一闭合曲线,它不是保守系统中心点附近的轨迹).从几何上讲,平衡态是空间中的点,周期态是空间中的闭合曲线.这些状态之间相互连接就构成了整个流场的各种斑图(pattern).参数变化后,这些平衡态和周期态也会变化,斑图也会变化.这里平衡态附近的轨迹都是局部形态.

现在我们介绍平衡态之间的大范围的轨线.同宿轨道(homoclinic orbit)是动力系统中当 $t\to\pm\infty$时趋向同一状态的一种轨道.一般 $t\to-\infty$和 $t\to+\infty$时的极限状态分别称为该轨道的 α 极限集和 ω 极限集.而把 $t\to+\infty$和 $t\to-\infty$分别趋向各自不同状态的轨道称为异宿轨道(heteroclinic).

图 3.7 是几种常见的同(异)宿轨道.图 3.7(a)有一个平衡态 A——鞍点.由它的不稳定流形 W_A^u 出发又回到了 A 点的稳定流形 W_A^s 的轨道是同宿轨道.同宿轨道所反映的状态随时间的变化是孤

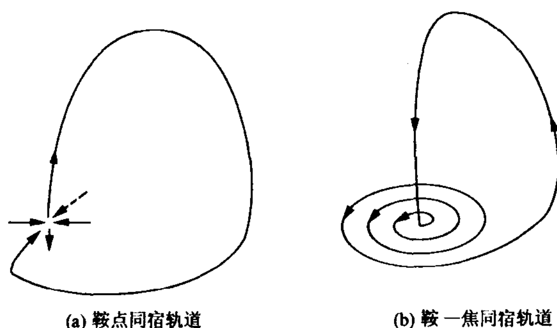
立波，因为当 $t\to\pm\infty$ 趋向于同一状态，且周期为无穷大. 图 3.7(b) 有两个平衡态，一个是鞍点 A，另一个是焦点 B. 这是由 B 点的不稳定流形 W_B^u 出发到 A 点的稳定流形 W_A^s 而形成的轨道，它反映的状态随时间变化是冲击波. 图 3.7(c) 是鞍—结异宿轨道，一个平衡态 A 是鞍点，另一个平衡态 B 是结点，它对应于冲击波.



(a) 鞍点同宿轨道及对应的孤立波　(b) 鞍—焦异宿轨道及对应的冲击波　(c) 鞍—结异宿轨道及对应的振荡冲击波

图 3.7　同(异)宿轨道

在三维相空间中也可以形成同(异)宿轨道. 图 3.8 就是分别由图 3.5 第四种的鞍点和由图 3.6 第三种鞍—焦点所形成的同宿轨道. 图 3.8(b) 称为 Silnikov 同宿轨道.



(a) 鞍点同宿轨道　(b) 鞍—焦同宿轨道

图 3.8　三维同宿轨道

这里应该指出，既然谈波动，它是无穷维动力系统——偏微分方程中的现象，求它们的行波解即化为变量 $\xi=x-ct$ 的常微分方程，即以 ξ 代替 t 来分析同(异)宿轨道. 同(异)宿轨道不仅保守系统有，

而且耗散系统也有,因而,孤立波和冲击波在保守系统和耗散系统中都可能有.

§5 混沌轨道

从前面我们认识到一维和二维自治动力系统要形成混沌轨道是不可能的,因为要是轨道相交,这就违背了定常速度场相空间中的一点只能有一个速度场的假设.对一维自治动力系统,它最复杂的状态就是平衡态.而二维自治动力系统中,最复杂的形态就是周期轨道或称为极限环.但是对三维或三维以上的自治动力系统,出现混沌轨道却是有可能的.

做一个形象的比喻,在一个房间的任意三个位置 A,B,C 点上,分别放一个糖盘子(或者猪肉、牛肉盘子),一只苍蝇在房间飞行.若苍蝇停在 A 点(或 B,C 点)上吃,这个状态就是定常状态;若 A,B,C 处都有人在,苍蝇不敢停下来,只好在靠近 A,B,C 三盘子的附近来回打转,闻闻糖或肉的味道,这就形成了周期轨道;若房间内的人多,到处都想打苍蝇,苍蝇只好在屋内乱窜,它的轨道只要不违背一个点上只有一个飞行方向就可以,那么这就形成了混沌轨道,它是一个有界轨道,且由于伸长和折叠,相邻轨道的指数分离.

下面我们来分析著名的洛伦茨方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=-Prx+Pry,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=Rax-y-xz,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-bz+xy,\end{cases}\tag{3.33}$$

其中 Pr,Ra 和 b 分别是控制参数 Prantdl 数、Rayleigh 数、正常数.(3.33)式中的 (x,y,z) 代表三维相空间.

该方程从物理学上描述了由于浮力(反映在 Ra 数上)引起对流到湍流的转换.对(3.33)式的速度散度:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}=-Pr-1-b<0.\tag{3.34}$$

所以方程(3.33)中的$-Prx$，$-y$和$-bz$项都是耗散力的反映.

将(3.33)式中的第一个方程对t微商，并仅仅用第二个方程右端的第一项代入得到

$$\ddot{x}=-\sigma\dot{x}+\sigma\dot{y}=-Pr\dot{x}+PrRax$$

或者

$$\ddot{x}+Pr\dot{x}-PrRax=0. \tag{3.35}$$

从方程(3.35)看出，(3.33)式中的Rax项在(3.35)式中表现为负恢复力，因而它是(3.33)式中驱动力的反映.

(3.33)式中的xy和xz两项是非线性项，因此洛伦茨方程含有驱动力、耗散力和非线性因素. 随着Ra的增加，表示驱动力在逐渐增大，就会出现形态的不断分岔.

首先令(3.33)式右端为零，就导得三个定常状态：

O：$(x,y,z)=(0,0,0)$，

$C_{1,2}$：$(x,y,z)=(\pm\sqrt{b(Ra-1)},\pm\sqrt{b(Ra-1)},Ra-1)$.

分析表明，取$b=\dfrac{8}{3}$，$Pr=10$，当参数处在$0\leqslant Ra<1$时，平衡态O是稳定的结点，而定常状态$C_{1,2}$在实数空间并不存在. 见图 3.9.

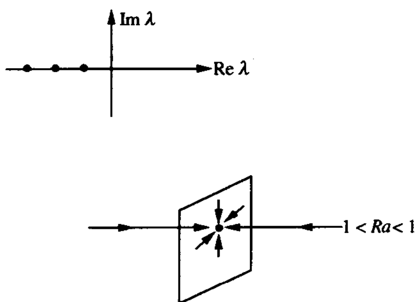


图　3.9

这属于图 3.5 的第二种情况.

此时状态(0,0,0)相当于静止状态，空气一旦扰动流动起来还是被耗散力拉回来了.

大概在$1<Ra<1.346$时，O点失稳变成图 3.5 中第四种的鞍点，而$C_{1,2}$两点新生出来成为稳定结点. 见图 3.10. 此时O和C_1之间

以及 O 和 C_2 之间形成两条鞍—结异宿轨道，但仍然无折叠，仅有 O 点的伸长，仍不能形成混沌轨道.

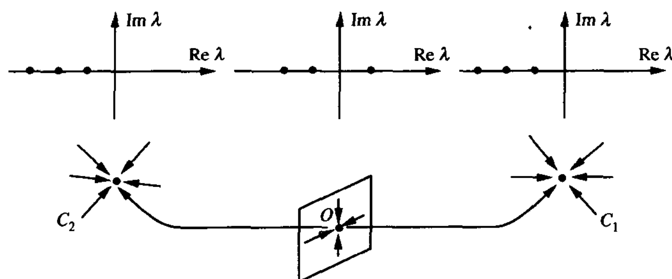


图 3.10

当 Ra 进一步增加，达到 $1.346<Ra<13.926$ 时，C_1 和 C_2 两点变成图 3.6 第二种的稳定焦点，O 点和 C_1 之间、O 和 C_2 之间形成两条鞍—焦异宿轨道，此时 C_1 和 C_2 代表对流状态，但对流还没有回来. 见图 3.11.

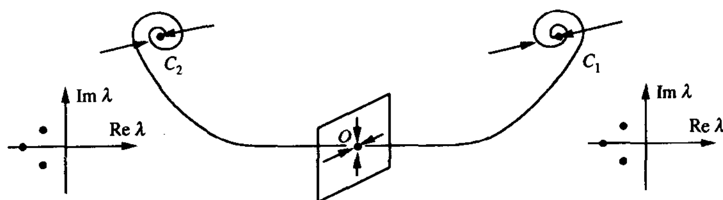


图 3.11

当 $13.926<Ra<24.74$ 时，C_1 和 C_2 点又形成不稳定的极限环，而 O 点和 C_2 之间、O 和 C_1 之间形成两条异宿轨道，这些形成对流状态. 见图 3.12.

最后到 $Ra>24.74$ 时，C_1 和 C_2 两点变成图 3.6 中第三种的鞍—焦点，O 点和 C_1 之间及 O 和 C_2 之间形成同宿轨道，这样伸长和折叠的条件具备了，就形成了著名的洛伦茨轨道，如图 3.13.

所以从洛伦茨方程混沌轨道的形成过程看出，在 $Ra>24.74$ 时，所有定常状态都不稳定，驱动力和耗散力相竞争的结果就只能是复

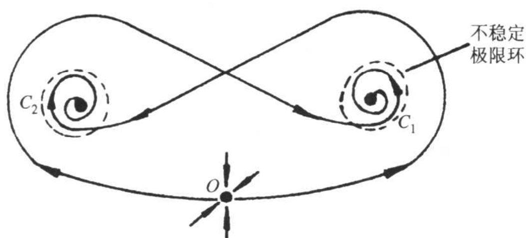


图　3.12

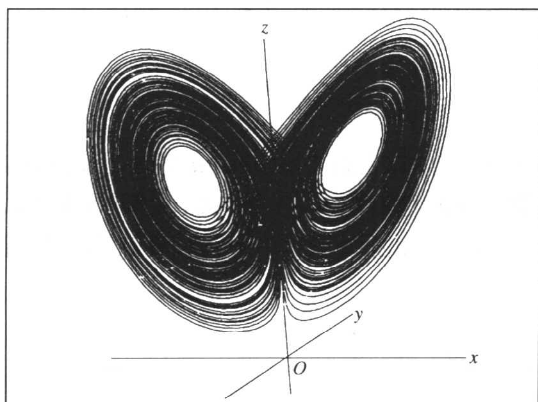


图 3.13　洛伦茨吸引子(三维轨道在平面上的投影)

杂的形态——混沌.这和逻辑斯蒂映射(2.1)进入混沌时($\mu>3.57$)所有周期轨道都变成不稳定一样.同时,同(异)宿轨道是形成混沌的关键.

这种耗散系统中的混沌也称为"奇怪吸引子"."奇怪"二字就反映伸长的一面,"吸引"反映折叠耗散的一面.在三维空间中一条闭合的周期轨道的扭转就形成拓扑上的扭结(knot),而有限的周期轨道的集合就形成一个环绕(link).它们将在第七章中讨论.

§6　耗散系统中的四种吸引子

前面我们已经介绍了保守系统和耗散系统,虽然这两种系统都

可以有混沌，但只有耗散系统才有吸引子，且此时的混沌可以称为奇怪吸引子.

还是以(3.3)式所示的三维自治动力系统为例. 它的定常状态有多种形态. 除了定常状态外，还可以有周期状态(一般称极限环)、拟周期状态和混沌状态. 这些状态怎么才叫吸引子呢？一般说，我们把时间$t\to\infty$时状态的归宿才叫吸引子. 因此在三维自治动力系统中一般有四种吸引子：定常吸引子、周期吸引子、拟周期吸引子和混沌吸引子. 这些吸引子之间如何区别呢？

前面章节中我们已经知道，混沌的伸长和折叠用正的 Lyapunov 指数来测量. 对(3.3)式，我们设定初始条件的差别在三个方向上分别是 $\delta x(0)$，$\delta y(0)$，$\delta z(0)$，那么 t 时刻以后就变成

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \delta x(0)\cdot e^{LE_1\cdot t}, \\ \delta y(t) &= \delta y(0)\cdot e^{LE_2\cdot t}, \\ \delta z(t) &= \delta z(0)\cdot e^{LE_3\cdot t}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

其中 LE_1，LE_2 和 LE_3 分别是三个方向的 Lyapunov 特征指数. 将(3.36)式中的三式相乘得

$$\delta v(t) = \delta v(0)\cdot e^{(LE_1+LE_2+LE_3)\cdot t}, \tag{3.37}$$

其中 $\delta v(t)$代表相空间体积的变化率.

将(3.37)式两边取对数得

$$LE_1 + LE_2 + LE_3 = \frac{1}{t}\ln\frac{\delta v(t)}{\delta v(0)}. \tag{3.38}$$

根据耗散系统的定义，表示相空间体积要缩小. 不过(3.11)式是局部性质，而(3.38)式是整体平均性质.

由(3.11)式，$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 代表体积的变化率，即

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \mathrm{div}\boldsymbol{v}\ , \tag{3.39}$$

将(3.39)式积分：

$$\ln\frac{V(t)}{V(0)} = \int_0^t \mathrm{div}\boldsymbol{v}\,dt, \tag{3.40}$$

由(3.38)和(3.40)式比较得

$$LE_1 + LE_2 + LE_3 = \mathrm{div}\boldsymbol{v}\ . \tag{3.41}$$

对雅可比矩阵的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,应有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,. \tag{3.42}$$

这里应该区分特征值 λ 和 Lyapunov 特征指数. 对耗散系统而言,特征值是反映平衡点附近(即局部)轨道性质,虽然要求 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}<0$,但该平衡点不稳定时,三个 λ 中,有的可以变为实部为正,这就是所谓局部不稳定的“伸长”. 而整体上讲,耗散就使轨道收缩到有限范围内的吸引子上去. Lyapunov 特征指数是长时间 t 内的平均结果,它已计入 λ 轨道上所有各点的局部影响,因而是耗散系统整体上的“折叠”性质. λ 可以是复数,但 LE 是实数.

在三维耗散系统中,对平衡态吸引子而言,它在三个方向均要收缩,因而满足 $LE_1<0$, $LE_2<0$, $LE_3<0$. 使 LE 按大小顺序排列,$LE_1\geqslant LE_2\geqslant LE_3$,表示为(－,－,－),见图 3.14(a).

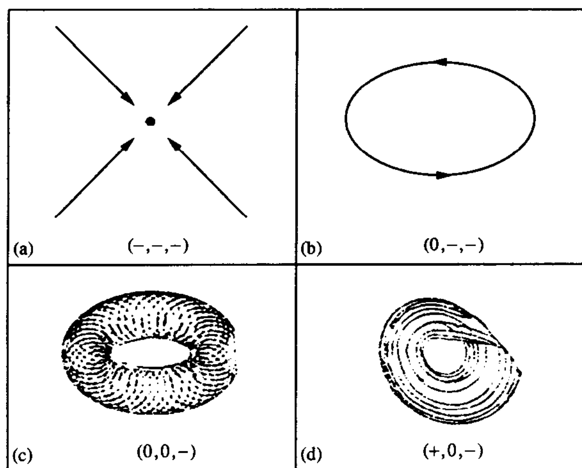


图 3.14 四种吸引子的 Lyapunov 特征指数

周期吸引子(或称极限环),在环所在平面方向以及垂直该平面方向上都要收缩,故 $LE_2<0$,$LE_3<0$. 而在极限环切线方向,它既不增大也不收缩,故 $LE_1=0$,表示为(0,－,－),见图 3.14(b).

同样对于二维环面上的拟周期吸引子,在环面上两个方向(一个方向相当于自转,另一个方向相当于公转)上不增大、不收缩,因此

$LE_1=0$，$LE_2=0$，只有在环面外，所有轨道都要向环面收缩，即 $LE_3<0$，表示为$(0,0,-)$，见图 3.14(c).

只有混沌吸引子，沿轨道方向 $LE_2=0$，伸长方向 $LE_1>0$，收缩方向 $LE_3<0$，并且 $LE_1+LE_2+LE_3<0$，表示为$(+,0,-)$，见图 3.14(d).

从上面讨论看出，这四种吸引子中只有混沌吸引子有正的 Lyapunov 特征指数，这是和其他三种吸引子相区别的惟一标志.

同时也要看到，耗散系统中若有源项造成平衡点不稳定，如不稳定的结点和不稳定的焦点，此时三个 Lyapunov 指数均为正，它也没有折叠回来的可能性，这也和混沌吸引子相区别.

习　题

1. 将方程 $\ddot{x}+x+x^2=0$ 化成一阶方程组，判断系统是保守系统还是耗散系统，并找出定常解. 系统存在同宿轨道吗？

2. 将方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-4x-3y,\\ \dot{y}=2x+3y\end{cases}$$

化成二阶方程. 说明系统是保守还是耗散的，定常解在相平面(x,y)上属于什么点？

3. 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=3x+y,\\ \dot{y}=3y\end{cases}$$

的定常解在相平面(x,y)上属于什么点？为什么？

4. 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$$

的定常解在相平面(x,y)上属于什么点？为什么？

5. 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-x-10y,\\ \dot{y}=10x-y\end{cases}$$

的定常解在相平面(x,y)上属于什么点？为什么？

6. 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=5x+y+z,\\ \dot{y}=-2y-3z,\\ \dot{z}=3y-2z\end{cases}$$

的定常解在相空间(x,y,z)上属于什么类型？为什么？

7. 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=5x+y+z,\\ \dot{y}=-2y-3z,\\ \dot{z}=3y-2z\end{cases}$$

的定常解是什么类型？

8. 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y-x^2,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$$

的定常解是什么类型？

9. 将系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\sin x-y\end{cases}$$

化为二阶方程，说明每一项的意义，并求出定常解.

10. 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2-y^2,\\ \dot{y}=xy-4\end{cases}$$

的定常解是什么类型？

11. 找出系统

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=x^2+4y\end{cases}$$

的定常解，并判断它们的类型.

12. 找出系统 $\ddot{x}+\dot{x}+x+x^3=0$ 的定常解，并判断其类型.

13. 找出系统 $\ddot{x}=x-\mu x^3$ 的定常解.

14. 分析方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-z,\\ \dot{y}=x+0.1y,\\ \dot{z}=0.1+(x-14)z\end{cases}$$

中每一项的意义,判断是否有混沌.

15. 将方程 $\dot{x}=-x+A\cos t$ 化为自治动力系统.

16. 将方程 $\ddot{x}+V'(x)=0$ 化成一阶方程组,且 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+V(x)$.

17. 将方程 $\ddot{x}+(a-2b\cos t)x=0$ 化成一阶方程组,且

$$H(x,y)=\frac{1}{2}(ax^2+y^2)-bx^2\cos 2t.$$

18. 找出方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\mu-x^2,\\ \dot{y}=-y\end{cases}$$

的定常解,并分析控制参数 μ 变化时状态的变化.

19. 找出系统

$$\begin{cases}\dot{x}=a-x-bx+x^2y,\\ \dot{y}=bx-x^2y\end{cases}$$

的定常解,并判断类型.

20. 分析下列系统的定常解的类型,其中 μ 为控制参数:

A. $\begin{cases}\dot{x}=\mu x-x^3+xy^2,\\ \dot{y}=-y-y^3-x^2y;\end{cases}$

B. $\begin{cases}\dot{x}=(\mu+x)y,\\ \dot{y}=-\mu x+x^2+y^2;\end{cases}$

C. $\begin{cases}\dot{x}=(\mu+x)y,\\ \dot{y}=\mu(y-x)+x^2+y^2;\end{cases}$

D. $\begin{cases}\dot{x}=\mu(x-y)-x^2+y^2,\\ \dot{y}=(\mu+x)y;\end{cases}$

E. $\begin{cases} \dot{x} = 3\mu(x-y) - x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x(\mu - y); \end{cases}$

F. $\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - x - y), \\ \dot{y} = 2\mu(y-x) + y(x-y); \end{cases}$

G. $\begin{cases} \dot{x} = \mu(3x-5y) - x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x(2\mu - y). \end{cases}$

第四章　周期性的输入不一定是周期性的输出

前面说到非周期运动发生于非线性系统中当驱动力和耗散力可以比拟时. 还有许多物理现象是非周期的,但似乎还有一定的周期性,其实每个系统内部都有自己的节律. 但是系统总是和外部环境相联系的,于是人们就寻找外部强迫的因素,看其周期是否和现象发生的周期相近. 例如太阳黑子有近 11 年的周期,若气候的旱涝有近 11 年左右的变化,那么我们就说旱涝是由于太阳强迫所引起的. 本章就澄清这些问题.

§1　线性系统和非线性系统的输入和输出

我们来看一个带有频率为 Ω 的周期性的输入 $A\cos\Omega t$ 加于一个线性系统会有什么结果.

例如,阻尼振荡线性系统

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2x=A\cos\omega_1 t, \tag{4.1}$$

当振幅 A 固定时,在强迫振荡频率 $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$处,当 α 很小,ω_1 接近于系统的固有频率 ω_0 时,x 达到最大,力学上称为共振. 因此,周期输入也是周期输出.

而对非线性系统却不一样,由于系统内部的各种尺度(频率)的相互作用,输入若是一个频率 ω,那么输出既可以有 ω 的振荡,也可以有频率为$\dfrac{\omega}{n}$(n 为整数)的次谐波,也可以有混沌,见图 4.1.

例如,强迫非线性振荡(duffing)

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}-x+x^3=A\cos\omega_1 t, \tag{4.2}$$

产生的输出频率 ω_2 和输入频率 ω_1 之比可以写成

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{p}{q}, \tag{4.3}$$

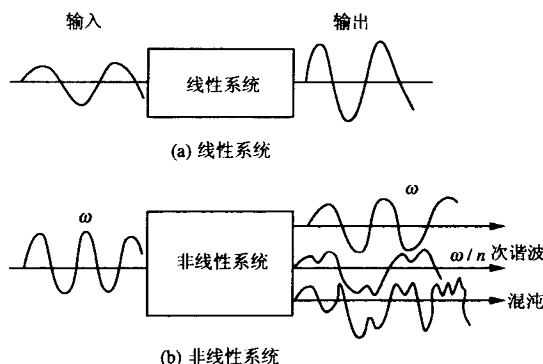


图 4.1　输入和输出

其中 p 和 q 是两个整数，且 p、q 的任何公共因子要去除. 因此若 $\frac{p}{q}$ 是有理数，那么就说系统的状态是周期的；若 $\frac{p}{q}$ 是无理数，那么这状态就是拟周期的.

当强迫项和阻尼项都是零时，此时方程(4.2)变成

$$\ddot{x}-x+x^{3}=0, \tag{4.4}$$

将(4.4)式化成方程组形式

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x-x^{3}.\end{cases} \tag{4.5}$$

(4.5)式有三个定常状态：(0,0)，(1,0)，(−1,0). 很容易说明，定常状态(0,0)是鞍点，定常状态(1,0)和(−1,0)是中心点. 围绕中心点的运动是周期运动，而且当振幅加大时，周期也加长. 所以内部产生的周期和外部强迫的周期之间可以有各种各样的比值，包括谐波在内.

若加上阻尼力，那么定常状态(1,0)和(−1,0)就变成了稳定的焦点吸引子，此时定常状态(1,0)和(−1,0)就好比位势的两个槽，而定常状态(0,0)就好比位势的一个脊，见图 4.2. 若一个小球在左槽内振动，时间很长以后它就被吸引到左槽底部. 若一个小球在右槽内振动，时间很长以后它就被吸引到右槽底部. 此时系统中仅有耗散力，因而运动是简单的，阻尼耗散能量，使得运动衰减下来.

但是若加上强迫项后，它成为系统的驱动力．不断变化强迫项的振幅 A，到一定程度，驱动力和耗散力相比拟时，左槽中的小球在左槽中来回振荡几次后就被甩到右槽中，在右槽中又来回振荡几次后被甩到左槽中，且左右槽来回振荡的次数不定，这就形成了非周期的混沌．见图 4.2.

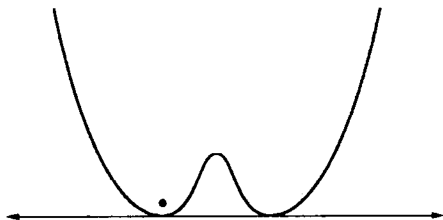


图 4.2 强迫振动的混沌模型

所以，对非线性系统，输入是周期的，但输出可能是拟周期的，甚至于非周期的．拟周期运动是混沌的前兆．

§2 三维相空间中的拟周期运动

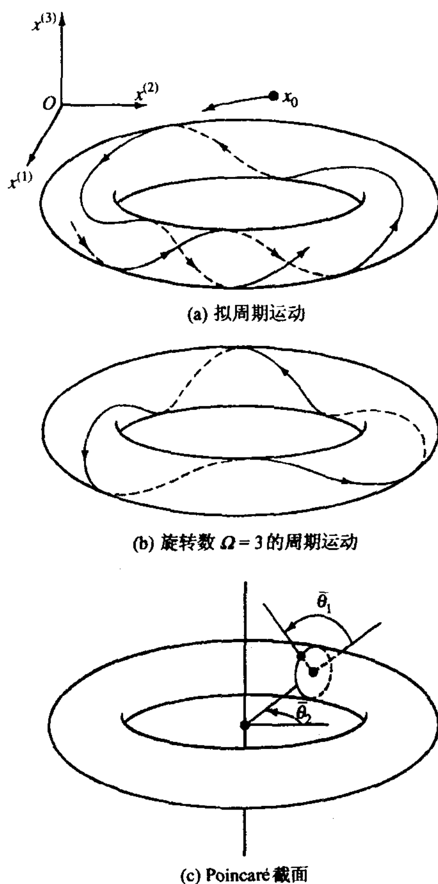
在三维相空间中，拟周期运动最好用环面来说明，它相当于一个自行车的内胎，运动在内胎表面上．它有两种频率的运动：一方面，运动要围绕内胎表面绕大圈转，这相当地球绕太阳的公转，它有一个频率 ω_1（周期为 T_1）；另一方面，运动要绕内胎自转，这相当于地球的自转，它有一个频率 ω_2（周期为 T_2），这两个频率之比为

$$\Omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}, \tag{4.6}$$

称为旋转数．

若运动的轨道头尾相接，则运动是周期的；若运动的轨道头尾不能相接，布满了整个环面，则运动是拟周期的．见图 4.3(a)，(b)．

为了描述拟周期运动，我们垂直于大圈作一平面切割环面，这平面称 Poincaré 截面，见图 4.3(c)，那么在环面上的运动就在 Poincaré 截面上打上许多点．例如 $\Omega=\frac{3}{2}$时，这就表示绕小圈转的时



(a) 拟周期运动

(b) 旋转数 $\Omega=3$ 的周期运动

(c) Poincaré 截面

图 4.3　环面上的轨道

间是绕大圈的时间的$\frac{3}{2}$倍，见图 4.4(a). 同样，$\Omega=\frac{5}{3}$就表示绕小圈转的时间是绕大圈的时间的$\frac{5}{3}$倍，见图 4.4(b). 图 4.4(a)，(b)中运动是沿顺时针旋转，其轨道从 0 点开始，轨道绕大圈一次，又回到 Poincaré 截面上，即又在 Poincaré 截面上打一个点. 图 4.4(a)说明大圈旋转了 3 周，小圈只转了 2 周，而图 4.4(b)说明大圈旋转了 5 周，小圈只转了 3 周.

如果 $\Omega=\frac{p}{q}$ 是无理数，那么 Poincaré 截面上的点就绝对不会重复，因而就布满了图 4.4 的小圆，这就是拟周期运动.

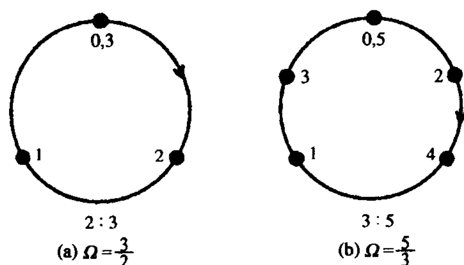


图 4.4 环面运动的 Poincaré 截面

像(4.1)式所示的周期驱动系统说明的那样，参数 A 很小时(驱动力小)，系统处在定常状态；参数 A 稍大一点(驱动力大一点)，定常状态就分岔成周期状态，如轨道在两个槽间的周期振动，这时就出现了一个频率. 当驱动力再增加，就可能出现第二个频率，此时两个频率构成的轨道很可能就是在二维环面上. 当两个频率之比是无理数时，这就是拟周期运动；当驱动力再增加，这种拟周期运动就变成了混沌.

§3 锁频和同步、圆映射

在一个系统中，当有两个或者多个振荡的频率发生非线性相互作用时，就很容易产生锁频现象. 前面我们已经看到，当控制参数在某个范围内，两个频率之比 $\Omega=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{p}{q}$ (p,q 为整数)，我们就称这两个振荡是锁频(frequency-locked). 当 $\Omega=\frac{p}{q}=1$ 时就称为同步(synchronization). 惠更斯发现，两只挂钟背靠背地挂在同一木板墙时，这两只钟会走到严格的同步. 月球绕地球公转(它的频率设为 ω_1)，月球又有自转(它的频率设为 ω_2)，我们知道严格地有 $\frac{\omega_1}{\omega_2}=1$，所以我们在地球上仅仅只能看见月球的正面. 人体的生物钟和白天黑夜这个周期同步，但由东半球到了西半球会发生时差，过了若干日子

才能调整过来，获得新的锁相.

从物理上讲，锁频的物理意义就是：在非线性系统中，当参数值(如强迫振荡的振幅 A)变化到一定范围内，必然引起非线性振荡的振幅变化. 前面我们已经知道，由于振荡的周期(频率)和振幅有关，所以必然引起振荡频率变化. 若两个频率之比适合关系式(4.6)时，说明两种频率的非线性相互作用引起 ω_2 的 p 次谐波，并和 ω_1 的 q 次谐波发生共振.

这就是说，锁频发生在频率共振的相互作用战胜了频率本身的变化. 例如，若 ω_1 是强迫振荡的频率，那么发生锁频在 ω_1 的某个范围之内. 但是由于 ω_1 的低次谐波的振幅大于高次谐波的振幅，所以锁频通常发生在 p 和 q 比较小的数值上，例如 $\frac{p}{q}=\frac{1}{2},\frac{2}{3}$，而不是 p 和 q 比较大的数值，如 $\frac{p}{q}=\frac{17}{19}$，因为 p 和 q 比较小时会发生较强的相互作用.

如果我们仅仅考虑横截环面的 Poincaré 截面，那么，旋转数差一个整数值的 Poincaré 截面是相同的. 例如旋转数 $\Omega=1\frac{2}{3}$ 和 $\Omega=\frac{2}{3}$，前者表示小圈转一圈加 $\frac{2}{3}$，大圈才转一圈，这和后者表示小圈只转 $\frac{2}{3}$，大圈转一圈，打出的点 1(见图 4.4(a))其效果是相同的. 所以我们今后只考虑旋转数的分数部分，即 Ω(模 1). 例如 2.3 的分数部分是 0.3，16.77 的分数部分是 0.77.

下面我们用简单的模式来研究锁频. 由于 Poincaré 截面上是一个圆上角度 θ 的变化，所以角度之间的映射写成

$$\theta_{n+1}=f(\theta_n)\ (\mathrm{mod}\ 1), \tag{4.7}$$

其中"mod"表示模数，这个映射定义角度在圆上旋转一周是 1，因而 $\theta=0.7$ 和 $\theta=1.7$ 代表圆上同样的点，函数 $f(\theta)$ 是周期函数. 例如

$$\theta_{n+1}=f(\theta_n)=\theta_n+\Omega-\frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n)\ (\mathrm{mod}\ 1, K>0), \tag{4.8}$$

就称为圆映射. 映射(4.8)式有两个控制参数，一个是频率比参数 Ω，

另外一个是非线性强度参数 K.

我们定义旋转数

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(\theta_0) - \theta_0}{n} \tag{4.9}$$

代表是否锁频的特征,其中分子代表 n 次迭代后的角距离.

我们先来分析(4.8)式的不动点,它满足方程

$$\theta = f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta),$$

即

$$\frac{2\pi\Omega}{K} = \sin(2\pi\theta), \tag{4.10}$$

因此若

$$K \geqslant 2\pi\Omega, \tag{4.11}$$

则映射(4.8)式至少有一个不动点.同时由(4.8)式右端的导数

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 1 - K\cos 2\pi\theta \tag{4.12}$$

的模是否小于 1,来判断该不动点的稳定性.

例如,$K=0.5$,$\Omega=0.04$,则很容易验证 $\theta=0.1$ 附近是一个稳定的不动点,$\theta=0.4$ 附近是一个不稳定的不动点.那么按(4.11)式,Ω 在

$$\theta < \Omega < \frac{K}{2\pi} \tag{4.13}$$

范围内,n 次迭代后收敛到稳定不动点 $\theta=0.1$ 附近,因而 n 次迭代后的角距离为 0,即锁相频率比值是$\frac{0}{1}$,即锁定在(4.13)式 Ω 接近的有理数 0 上.

对于 Ω 值接近于 1 时,要得到$\frac{1}{1}$的频率锁相,我们要注意我们测定角是以 mod 1 为要求,因此出现的不动点可以写成

$$\theta + 1 = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta),$$

则出现不动点的条件为

$$\Omega \geqslant 1 - \frac{K}{2\pi}, \tag{4.14}$$

所以归纳起来，Ω 满足(4.13)式时出现$\frac{0}{1}$的锁相，而满足(4.14)式时出现$\frac{1}{1}$的锁相. 也就是说非线性映射(4.8)式在 $K>0$ 时 ω 可以锁定在与 Ω(无理数代表拟周期)相近的有理数$\frac{p}{q}$上.

问题是非线性耦合条件最喜欢的锁相频率是什么？答案是若参数 Ω 使得 ω 落在$\frac{p}{q}$和$\frac{p'}{q'}$之间，则锁相的频率为分子和分子相加，分母和分母相加，即

$$\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\rightarrow\frac{p+p'}{q+q'},\tag{4.15}$$

在参数平面(Ω,K)上，显示出锁相的区域，称为 Arnold 舌头，见图 4.5. 这样的构造和数理上的法拉里(Frarey)序列有关，所谓法拉里序列就是 0 和 1 之间的分数序列，它的构造方法类似(4.15)式：

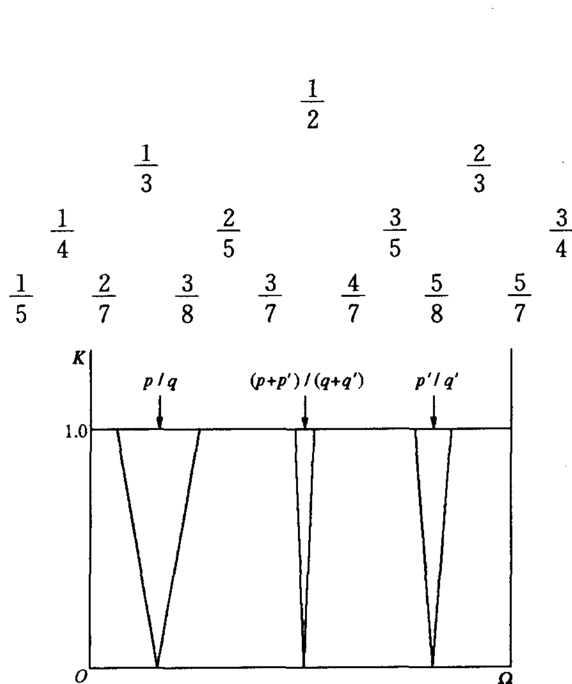


图 4.5　锁相频率区域(Arnold 舌头)

因此，分母最大为 5 的法拉里序列（5 称为法拉里序列的序）为

$$\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}. \tag{4.16}$$

其中，每个分数是它相邻的两个分数按(4.15)式所定义的“和”. 有趣的是如果我们从构造法拉里序列的表中的右上角$\frac{1}{1}$开始作锯齿形运行，即$\frac{1}{1}\to\frac{1}{2}\to\frac{2}{3}\to\frac{3}{5}\to\frac{5}{8}$，我们注意到这里法拉里序列中的数的分子和分母就是 Fibonacci 数. 若从左上角$\frac{0}{1}$开始作锯齿形运行，即$\frac{0}{1}\to\frac{1}{2}\to\frac{1}{3}\to\frac{2}{5}\to\frac{3}{8}\to\frac{5}{13}\to\frac{8}{21},\cdots$，这也是隔一个数的 Fibonacci 数之比.

常常一个系统的控制参数变化后，在 $K<1$ 时，先是两个频率的拟周期性（旋转数为无理数），然后锁相成周期轨道（旋转数为有理数），最后在 $K>1$ 演变成混沌. 在圆映射(4.8)式中表现为 $K>1$ 时，成为不可逆的映射（即 θ_{n+1} 有多个 θ_n 对应）.

§4 拟周期和连分数

前面我们已经看到，当旋转数为无理数时，此时并不是频率锁相的周期运动，而是拟周期运动，我们将用有理数的序列来近似给定的无理数旋转数. 例如无理数的黄金分割数

$$G=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\,033\,9\cdots, \tag{4.17}$$

它能写成如下的连分数形式：

$$G=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}, \tag{4.18}$$

(4.18)式的省略号“…”表示它连续这种形式直到无穷. 如果我们有 n 个分数线就停止，那么就是对 G 的 n 阶近似. 例如前 n 阶近似为

$$
\begin{cases}
G_1 = \dfrac{1}{1} = 1, \\[2ex]
G_2 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1}} = \dfrac{1}{2}, \\[2ex]
G_3 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1}}} = \dfrac{2}{3}, \\[2ex]
G_4 = \dfrac{3}{5}, \\[2ex]
G_5 = \dfrac{5}{8}.
\end{cases} \tag{4.19}
$$

当 $n \to \infty$ 时，那么 G_n 就趋向于无理数 G.

为了简单起见，连分数

$$
\cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}} \tag{4.20}
$$

可以简写成 $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$，对于 G，就可以简写成 $[1, 1, 1, \cdots]$.

从(4.19)式我们看出有下面关系：

$$
G_n = \frac{1}{1 + G_{n-1}}, \tag{4.21}
$$

当 $n \to \infty$ 时有

$$
G = \frac{1}{1 + G}, \tag{4.22}
$$

由(4.22)式产生 G 的二次方程

$$
G^2 + G - 1 = 0, \tag{4.23}
$$

它的解就是(4.17)式(参看第二章习题 8).

有意思的是，若已知 G_1 和 G_2，则(4.19)式中的 $G_3, G_4, G_5, \cdots$，分别就是法拉里序列的分子和分子相加，分母和分母相加的结果，如(4.15)式，即

$$
G_1 = \frac{1}{1}, \quad G_2 = \frac{1}{2}, \quad G_3 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3},
$$

$$G_4=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5},\quad G_5=\frac{2+3}{3+5}=\frac{5}{8}. \tag{4.24}$$

更有意思的是，G_i 的分子和分母都是 Fibonacci 数，即

$$G_i=\frac{F_i}{F_{i+1}}, \tag{4.25}$$

其中，F_i 是按照如下递推关系得到的 Fibonacci 数：

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\quad F_0=0,\quad F_1=1. \tag{4.26}$$

更使人着迷的是，若连分数表达式(4.20)中的 a 以某个周期 K 重复出现，即 $a_m=a_{m+K}$，那么这个周期的连续分数代表一个无理数，并且它是一个整数系数的二次方程的解. 例如，对黄金分割数 G，有 $a_2=a_1=1$，即周期为 $K=1$. 又如

$$x=\sqrt{2}-1=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}},$$

即

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=2, \tag{4.27}$$

它也是周期为 $K=1$ 的周期连分数，它满足的二次方程为

$$x=\frac{1}{1+x}\quad \text{即}\quad x^2+2x-1=0. \tag{4.28}$$

又如

$$x=\sqrt{3}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}},$$

即

$$a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=2,\ \cdots, \tag{4.29}$$

它是周期 $K=2$ 的连分数. 它满足的二次方程为

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}}=\frac{x+2}{x+3},\quad \text{即}\ x^2+2x-2=0. \tag{4.30}$$

这就充分说明拟周期状态能够用一系列有理数来近似.

§5 高斯映射

前面我们已经看到，旋转数为有理数$\frac{p}{q}$时，对应于周期锁相状态，用连分数表示它是有限的连分数，例如旋转数

$$\omega=\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}=1+\frac{1}{7/2}$$
$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=[1,3,1],$$

而对于旋转数为无理数时，它对应于拟周期状态，用连分数表示，它是周期循环无限的连分数. 例如黄金分割数表示为[1,1,1,…]. 这种产生像黄金分割数或(4.27)式这种无理数的过程就包含产生自相似的混沌过程，所以必然和混沌相联系.

下面这种映射称为高斯映射或者双曲映射：

$$x_{k+1}=f(x_k)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{x}(\mathrm{mod}\ 1), & x\in(0,1),\end{cases}\tag{4.31}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$. 此映射相当于每次取数$\frac{1}{x}$的分数部分，因此若取 $x_0\in[0,1)$，那么

$$n_{k+1}=\frac{1}{x_k}-x_{k+1}\tag{4.32}$$

就是$\frac{1}{x_k}$的整数部分.

所以，若 x_0 的连分数展开：

$$x_0=[n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k]=\frac{1}{n_1+[n_2,n_3,\cdots,n_k]},\tag{4.33}$$

则高斯映射(4.31)式相当于取$\frac{1}{x_0}$的分数部分，但 n_1 是$\frac{1}{x}$的整数部分. 剩下的$[n_2,n_3,\cdots,n_k]$就是其分数部分，

$$f([n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k])=[n_2,n_3,\cdots,n_k],\tag{4.34}$$

这相当于锯齿映射(2.30)式的移位运算.

因此若 x_0 是有理数，那么经过高斯映射就终止在高斯映射的不动点 $x^*=0$；若 x_0 是无理数，那么经过高斯映射，一会儿就完全变成混沌.

例如 $x_0=\frac{\sqrt{13}-3}{2}=[3,3,3,\cdots,n_k]=0.302\,775\,6\cdots$，理论上 x_0 应该用连续分数的无穷多个 3 表示，即 $x_0=[\dot{3}]$，但是机器总是有限精度的，因此上面的 x_0 只能表示成[3,3,3,3,3,3,3,3,3,1,4,1,2,10,4,11,90,1,…]，通过高斯映射迭代 8 次后，随机数据就移到前面来了，结果是 0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.2,0.8,0.2,0.6,0.4,0.0,0.2,…，这完全是混沌.

§6 随机共振

从前面(4.2)式所示的强迫非线性振荡系统我们已经看到，对周期性的输入，输出可以是各种谐波，甚至混沌. 当强迫振荡的振幅 A 比较小时，运动可以在 $x=+1$ 或 $x=-1$ 附近振荡. 当振幅 A 比较大时，运动可以在两个槽之间来回振荡，甚至出现无规则的振荡，这就是混沌.

但是若在(4.2)式加入随机噪声 $\varepsilon(t)$ 后变成

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}-x+x^3=A\cos\omega_1 t+\varepsilon(t), \tag{4.35}$$

从物理上考虑，当阻尼系数 α 比较大时，不可能有共振发生. 只有当阻尼系数 α 比较小时，才有可能共振. 同时，当槽和中间脊之间的势垒高度 B 大于噪声 $\varepsilon(t)$ 涨落振幅 kT(k 是玻尔兹曼常数，T 是介质的绝对温度)，那么振荡很可能在两个槽当中的一个振荡. 当势垒高度 B 小于 kT 时，振荡则可能在两个槽之间振荡，并产生一个和强迫振荡频率 ω 相同的振荡，这就是随机共振. 虽然此时强迫振荡的振幅 A 并不大. 理论上在两个槽之间的振荡规律称为 Kramers 速率：

$$R_K=\frac{\omega_0\omega_b}{2\pi\alpha}e^{-\frac{B}{kT}}, \tag{4.36}$$

其中 $\omega_0=\sqrt{1}$，$\omega_b=\sqrt{2}$ 分别是与势脊和势槽相对应的系统频率.

随机共振概念是研究气候变化的 10 万年的周期而引起的. 人们

发现地球绕太阳转动的偏心率的变化也大约为10万年，这就相当于太阳绕地球的一个强迫周期信号，但这一周期信号振幅 A 很小，不足以产生气候变化的如此大幅度. 因此只有将微弱强迫信号与随机力 $\varepsilon(t)$ 结合起来，随机力大大提高了小的周期强迫信号对非线性系统的调制能力，通过“随机共振”引起了大幅度的气候变化.

习 题

1. 请绘制环面上运动不同旋转数 Ω 的 Poincaré 截面：(a) $\Omega=\frac{3}{7}$；(b) $\Omega=\frac{7}{3}$；(c) $\Omega=\frac{3}{5}$；(d) $\Omega=\frac{8}{5}$；(e) $\Omega=\frac{13}{5}$.

2. 若某个连续分数 x 表示为 $[n,n,n,\cdots]=[\dot{n}]$，其中 n 是正整数. 问该数是有理数还是无理数？x 满足什么样的二次方程？

3. 对高斯映射，若 x_0 取为黄金分割数，即 $x_0=[1,1,1,\cdots]=[\dot{1}]$，说明它是高斯映射的不动点.

4. 分析(4.5)式的定常状态的类型.

5. 如何理解随机力 $\varepsilon(t)$ 大大提高了小的强迫信号振幅 A 的调制能力？

第五章 如何描述大涡旋中有小涡旋

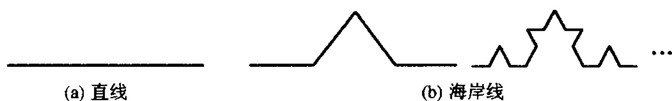
当你在划船时,浆的后头会出现大的旋涡,接着大旋涡中会出现许许多多尺度不同的小旋涡,在物理学上称它为涡旋.大气中的大涡旋达数千公里,如北半球的气旋和反气旋,但这些大涡旋中还有各种小涡旋,小涡旋中还含有更小的涡旋.这种大涡旋中有小涡旋的现象是多尺度现象的一种,它在自然界是非常普遍的.这种表面上看起来很杂乱无章的现象,能否找到它的规律呢?由于这种现象一般主要出现在非线性系统中,各种尺度的涡旋之间均发生相互作用.非线性确定性系统可以出现随机的不确定的结果——混沌,同样非线性多尺度系统,杂乱无章的大涡旋中有小涡旋的现象也有规律可循.

§1 多尺度系统

物理学将经典力学称为宏观物理学,把量子力学称为微观物理学,现在研究的还有比原子尺度大一个数量级的纳米物理学——介观物理学.宏观、介观和微观实际上代表三种不同的尺度层次.大气科学中将数千公里尺度的涡旋称为大尺度,将数百公里的涡旋称为中尺度,将数公里的涡旋称为小尺度,由此可见尺度的重要性.但是在实际大气中,所谓大、中、小涡旋是混杂在一起的,是不能将其中的某个涡旋取出来的,而且大、中、小尺度的差别达到 9 个数量级.假如把人的高度都是 1 m 数量级称为有特征尺度系统,则把尺度相差好多个数量级的系统称为多尺度系统,或无特征尺度系统.

下面举几个多尺度系统的例子.

例 1 第一章我们已经讲到海岸线的长度的提法是不确切的.问题是如何描述它呢? 图 5.1 是单位长度的直线和由此生成的一种海岸线模型.



(a) 直线　　(b) 海岸线

图　5.1

对单位长度的线段来讲，不管你用什么长度 r 的尺子来度量，它的长度总是 1，即

$$L = r^0 = 1, \tag{5.1}$$

但是对于图 5.1(b)的海岸线模型来讲，用 $r=\frac{1}{3}$的尺子去量，由于比 $\frac{1}{3}$小的弯曲在测量的过程中丢失了，所以测量出来的长度为 $L\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$；若用 $r=\frac{1}{9}$的尺子去量，则比$\frac{1}{9}$小的弯曲在测量的过程忽略了，所得长度为 $L\left(\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2$；……如此不断测量下去. 可以看出，尺子 r 的长度愈小，测量出来的海岸线长度 L 愈长. 尺子最大为 $\left(\frac{1}{3}\right)^0$，最小为$\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$n$ 很大时这大小尺度差好多数量级.

若设海岸线长度 L 和尺子 r 之间的关系为

$$L = r^{\mu} = N \cdot r, \tag{5.2}$$

则有

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n\cdot\mu} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

两边取对数

$$n(\lg 4 - \lg 3) = n\mu(\lg 1 - \lg 3),$$

由此求出

$$\mu = 1 - \frac{\lg 4}{\lg 3} = -0.2618, \tag{5.3}$$

其中无理数

$$D = \frac{\lg 4}{\lg 3} = 1.2618\cdots,$$

就称为图 5.1(b)海岸线的分数维.

这种定义是妥当的，它也包含了直线长度的定义，因为

$$L = r^{1-D} = N \cdot r, \tag{5.4}$$

直线维数 $D=1$，所以 $L=r^0=1$，它的长度不随 r 改变. 而对海岸线 $1-D<0$，所以海岸线的长度随尺子 r 减小而增加.

由(5.4)式求得

$$N=r^{-D}\quad \text{或者}\quad D=\frac{\lg N}{\lg\left(\frac{1}{r}\right)}. \tag{5.5}$$

(5.5)式就是分数维 D 的定义，它说明若用尺子长度为 r 的“小立方体”去量分形对象，若得到“小立方体”的个数为 N(在海岸线问题中 N 为段数)，则由(5.5)式就可以求 D.

应该注意，D 有“维数”的含义. 但更为重要的是，尺子 r 的大小变化时，海岸线长度 L 也变化了，N 的个数也变化了，但是 D 不发生变化，所以分数维 D 是无特征尺度系统中的一个不变量.

例 2 图 5.2 是著名的康托尔(Cantor)集合，请注意它是一个点集合. 从它的构造过程看出，每次都是“一分为二”，且留有空隙. 若是直线，它的维数是 1，若是一个点，它的维数是 0. 现在是无穷多个点(有间歇)的集合，它既不是 0 维，又不是 1 维(直线由无穷多个没有间断的点组成)，只能处在 0 和 1 之间. 按照(5.5)式的定义，有

$$D=\frac{\lg N}{\lg\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{\lg 2}{\lg\left(\frac{1}{1/3}\right)}=0.6301. \tag{5.6}$$

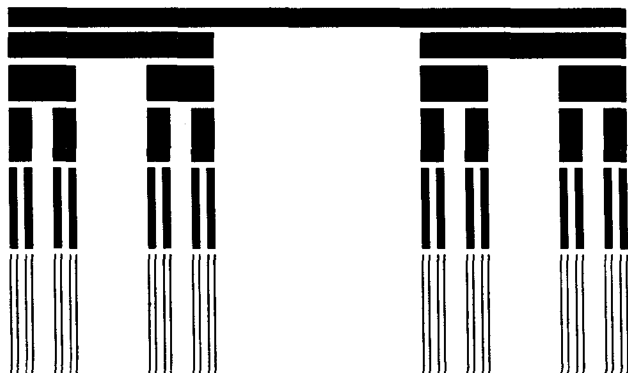


图 5.2 康托尔集合

这里最大尺度为 1，尺度以 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 向下递减，当 n 很大时，大小尺度之差高达数个量级.

例 3 以湍流涡旋为例，大涡旋中含有小涡旋，但是中间有间隙，即有的地方并不形成涡旋. 假如最初是一个单位正方形的方形涡旋，它被分成边长为 $\frac{1}{2}$ 的三个小涡旋，留下一个空格中没有涡旋. 而三个小涡旋的每一个又分成边长为 $\frac{1}{4}$ 的三个更小的涡旋，……照此下去就形成一个湍流涡旋的串级(cascade)图像，见图 5.3.

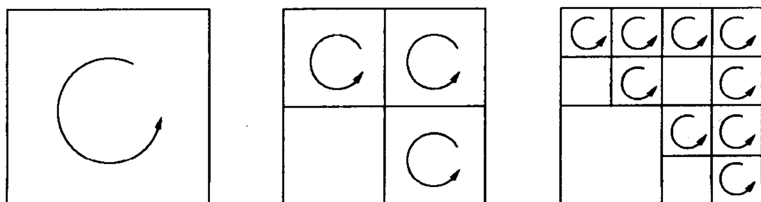


图 5.3 湍流涡旋的串级过程

第一章已经说明，研究涡旋的个数是无意义的. 和海岸线长度一样，我们设定小涡旋的面积 S 和尺度 r 的关系为

$$S = r^{\mu}, \tag{5.7}$$

由图 5.3 得到

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu \cdot n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

两边取对数，得

$$n(\lg 3 - \lg 4) = n\mu(\lg 1 - \lg 2),$$

由此求出

$$\mu = 2 - \frac{\lg 3}{\lg 2} = 2 - D = 2 - 1.584\ 96 = 0.415\ 04\cdots. \tag{5.8}$$

由(5.5)式，显然 $\frac{\lg 3}{\lg 2}$ 就是图 5.3 涡旋的分数维. 若小涡旋充满整个空间(无间歇)，则 $D=2$，$\mu=0$，$S=1$.

对三维空间的间歇涡旋也同样可以讨论. 从(5.3)和(5.8)式，我们可以归纳，小涡旋在整个 d 维空间中所占的概率为

$$P(r) = r^{d-D}, \tag{5.9}$$

其中 $d-D$ 称为余维数.

以上仅仅是三个例子,还有聚集(aggregation)、逾渗(percolation)、树木生长、雪花形成等都是多尺度现象.多尺度系统在自然界是普遍存在的.

§2 物理量随尺度的变化

前面我们看到了多尺度系统中,尺度是一个很重要的变量.它的重要性在于物理量是随尺度变化的.海岸线长度、康托尔集合的段数、涡旋的个数都随尺度而变化.还有,像第一章所指出的,气候的冷暖也是随时间尺度的变化而变化.在过去我们知道压力随温度变化(气体状态方程),状态随时间变化,大气的密度随高度变化,但是从来不强调物理量随尺度的变化.这是因为过去我们从概念上讲,不研究或很难研究像大涡旋中含有小涡旋这样的问题.

今天我们回忆起来,在经典力学中也有类似的问题.大家知道,两个物体之间均存在万有引力的作用,力的大小是和两个物体之间的距离平方 r^2 成反比,即

$$f(r) \propto \frac{1}{r^2}, \tag{5.10}$$

当时我们称 r 为距离.今天我们知道小到原子之间,大到宇宙天体之间均有万有引力的作用,距离大、小的差别可以达到数十个数量级,当然也是无特征尺度系统.现在我们可以称(5.10)式中的 r 为尺度.所以万有引力是典型的多尺度系统中物理量随尺度变化的例子.

既然物理量随尺度变化,我们习惯的语言就是"尺度愈小,量出的海岸线愈长"、"尺度愈小,康托尔集合的线段数愈多"、"尺度愈小,小涡旋的个数愈多"这类说法.对(5.10)式我们也会说"尺度愈小,万有引力愈大".问题是(5.10)式中有个反映"平方"反比关系的"2",这个数字"2"是不随尺度变化而变化的.实际的多尺度系统,像海岸线、康托尔集合、气候、湍流涡旋等,我们找到的随尺度变化的不变量是无理数,像海岸线的不变量 $D=1.2618\cdots$、康托尔集合的不变量 $D=$

0.6301…、湍流涡旋的不变量 $D=1.58496\cdots$. 此时我们不说"海岸线长度为×××公里",不说"康托尔集合的线段数目有×××个",不说"湍流涡旋有×××个"了. 但是若说"海岸线的长度和尺度的 0.2618…次方成反比"、"康托尔集合的线段数和尺度的 0.6301…次方成反比"、"涡旋的面积和尺度的 0.415 04…次方成正比"之类的语言也显得太累赘了. 更重要的是,实际中,多尺度系统的物理量常常是"统计量",哪里有像图 5.1 那种很规则的海岸线? 哪里有像图 5.2 那种很标准的一分为二的康托尔集合? 哪里有像图 5.3 那种一个大涡旋分成三个小涡旋等这种事先规定好的多尺度系统?

简捷的语言就是说小尺度和大尺度之间"自相似". 将图 5.1 中尺度为 $r=\frac{1}{9}$ 的海岸线的一段加以放大,就成了尺度为 $r=\frac{1}{3}$ 的海岸线了. 同样,将尺度为 $r=\frac{1}{9}$ 的康托尔集合的一部分加以放大,就成了尺度为 $r=\frac{1}{3}$ 的康托尔集合的一部分;将尺度为 $r=\frac{1}{4}$ 的小涡旋加以放大,就成了尺度为 $r=\frac{1}{2}$ 的涡旋图像.

数学上,"自相似"表示成

$$\begin{aligned} L(\lambda r) &= \lambda^{\mu} L(r), \\ N(\lambda r) &= \lambda^{-D} N(r), \\ S(\lambda r) &= \lambda^{d-D} S(r). \end{aligned} \tag{5.11}$$

总之,小尺度的物理量和大尺度的物理量之间成一个"倍数"关系,这个"倍数"的数值,对不同的多尺度系统可以有不同的数值.

有人把分形和分维定义为自相似,我们认为不太合适,因为它缺少了一个前提,就是对无特征尺度(或者多种尺度)系统才能用分形和分维,对有特征尺度的现象不需要用分数维.

§3 多尺度系统的奇异突变性

从前面的三个例子我们看出,由于多尺度系统含有多种尺度. 所以,经常表现出状态的奇异突变性. 例如,海岸线正是有大大小小不同尺度的弯曲,所以在弯曲的地方都比较突然,数学上讲其导数不连

续.康托尔集合在那些有线段和无线段的交界处,状态发生突变,或是从无(线段)到有,或者从有到无.对湍流涡旋系统,大家可以想像,到某一步后,最小的涡旋所占的体积愈来愈小,甚至于在空间处在一个很细的线段上或者一些点上,但是涡旋的强度却很大.这不是奇异的性质吗?

在第二章对逻辑斯蒂映射(2.1)式中,我们曾经把$(\mu_\infty-\mu_n)$看做尺度,得到周期数目 N 和尺度的关系为

$$N \propto (\mu_\infty - \mu_n)^{-r}, \tag{5.12}$$

从(5.12)式看出,当 $\mu_n \to \mu_\infty$时,周期为无穷大.这不是同样的奇异性吗?它说明状态由周期状态发生混沌而成为非周期的混沌状态.

我们以康托尔集合为例说明突变发生的规律.因为很多多尺度系统的状态可以归纳为两种:有和无、冷和暖、黑和白(围棋)、0 和 1、开和关、好和坏、亮和暗……,所以康托尔集合的一个线段分成两段,中间去掉一段有它的现实意义.

为了定量说明突变位置的规律性,我们将康托尔集合和一个动力系统(映射)联系在一起.我们看下列映射:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n = w_1(x_n), \\ x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3} = w_2(x_n), \\ x_n &\in [0,1], \end{aligned} \tag{5.13}$$

于是,若从单位间隔[0,1]开始,则映射 $w_1(x_n)$将单位间隔变换成间隔$\left[0,\frac{1}{3}\right]$,而 $w_2(x_n)$将单位间隔变换成间隔$\left[\frac{2}{3},1\right]$.再变换下去,映射 $w_1(x_n)$将间隔$\left[0,\frac{1}{3}\right]$变换成$\left[0,\frac{1}{9}\right]$,$w_2(x_n)$将间隔$\left[0,\frac{1}{3}\right]$变换成$\left[\frac{2}{3},\frac{5}{9}\right]$;$w_1(x_n)$将间隔$\left[\frac{2}{3},1\right]$变换成$\left[\frac{2}{9},1\right]$,$w_2(x_n)$将间隔$\left[\frac{2}{3},1\right]$变换成$\left[\frac{8}{9},1\right]$.这样不断变换下去,映射(5.13)式的吸引子就是康托尔集合.图 5.4 是映射(5.13)式迭代过程的宝塔图.

从图 5.4 看出,图中的箭头就好像上一层通过 $w_1(x_n)$和 $w_2(x_n)$生出的两个儿子.从多尺度系统观点看,上一尺度层次分出下一尺度

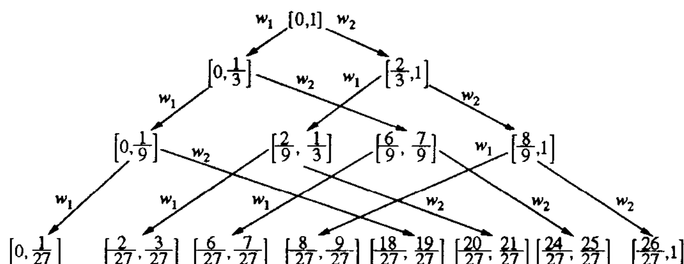


图 5.4　映射(5.13)式的迭代宝塔图

层次两个状态，如气候大尺度的冷期(或暖期)中含有下一尺度上的冷期和暖期. 依此类推.

那么突变点的位置如何确定呢？从图 5.4 看出，上一层次的数字 1，对应下一层次两个数字："$\frac{1}{3}$"和"$\frac{2}{3}$". 因此，以 x_{n+1} 为横坐标，x_n 为纵坐标，则得到(5.13)式的逆映射，见图 5.5，即

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_{n+1} = w_1^{-1}(x_n), \\ x_n &= 3x_{n+1} - 2 = w_2^{-1}(x_n). \end{aligned} \tag{5.14}$$

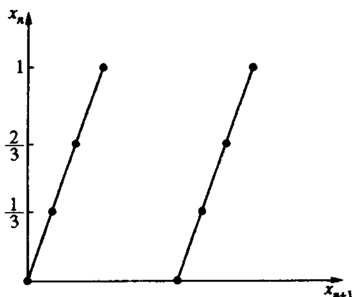


图 5.5　(5.13)式的逆映射

由图 5.5 看出，上一层次(x_n)的一个点对应于下一层次两个点 x_{n+1}. 例如 $x_n=1$，则由(5.14)式的 $w_1^{-1}(x_n)$ 和 $w_2^{-1}(x_n)$ 分别得到 $x_{n+1}=\frac{1}{3}$ 和 1. 而取 $x_n=0$ 时，则由(5.14)式的 $w_1^{-1}(x_n)$ 和 $w_2^{-1}(x_n)$ 分别得到 $x_{n+1}=0$ 和 $\frac{2}{3}$ 这四个 x_{n+1} 值. 因此由上一层次的一个值，则对应于下

一层次的两个值，见图 5.5 中的黑点. 因此，康托尔集合的突变点就可以用一个(5.14)式所示的动力系统来描述.

上面我们将康托尔集合与一个动力系统相联系，从而可以描述突变点之间的规律. 有时一分为二的过程还应考虑质量分布的不均匀，此时奇异性不仅有状态的突变位置，而且还有质量分布的奇异性. 例如映射

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4}x_n = w_1(x_n) \\ x_{n+1} &= \frac{2}{5}x_n + \frac{3}{5} = w_2(x_n) \end{aligned}\right\} \equiv f(x), \quad \begin{aligned} P_1 &= 0.6, \\ P_2 &= 0.4, \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中 $x_n \in [0,1]$，(5.15)式和(5.13)式的区别在于多了一个质量分配，$w_1(x_n)$映射的质量占 60%(或概率)，而 $w_2(x_n)$映射的质量占 40%. 图 5.6 是最初几步的质量分布.

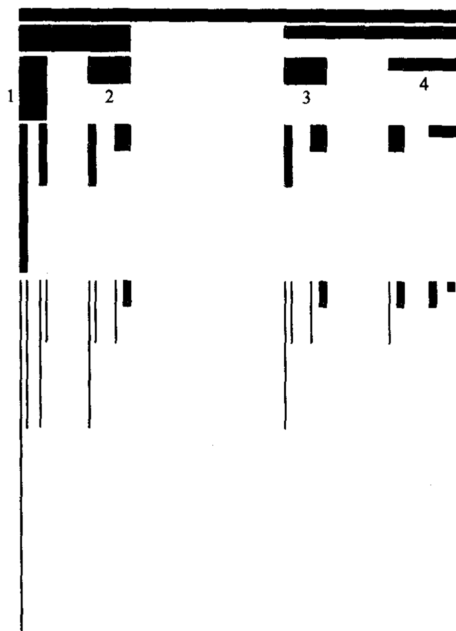


图 5.6 单位质量形成的非均匀康托尔集合的质量分布

和前面讨论类似，区间[0,1]经过 $w_1(x_n)$和 $w_2(x_n)$变换分别得

到区间$\left[0,\frac{1}{4}\right]$和区间$\left[\frac{3}{5},1\right]$. 因此，区间[0,1]可以看成是区间$\left[0,\frac{1}{4}\right]$和区间$\left[\frac{3}{5},1\right]$分别的逆变换 $w_1^{-1}(x_n)$和 $w_2^{-1}(x_n)$的结果. 最初的测度 $\mu_0=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$. 对于区间$\left[0,\frac{1}{4}\right]$，因为

$$w_1^{-1}\left[0,\frac{1}{4}\right]\in [0,1],$$

而 $w_2^{-1}\left[0,\frac{1}{4}\right]\in\left[-\frac{2}{3},-\frac{7}{4}\right)$，故

$$\mu_1\left[0,\frac{1}{4}\right]=P_1\mu_0\left(w_1^{-1}\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)=P_1;$$

同理，$\mu_1\left[\frac{3}{5},1\right]=P_2\mu_0\left(w_2^{-1}\left[\frac{3}{5},1\right]\right)=P_2$.

同样，图中标记为1,2,3,4的小块的质量分布为

$$\mu_2(1)=P_1\mu_1\left[0,\frac{1}{4}\right]=P_1\cdot P_1=P_1^2,$$

$$\mu_2(2)=P_2\mu_1\left[0,\frac{1}{4}\right]=P_2\cdot P_1,$$

$$\mu_2(3)=P_1\mu_1\left[\frac{3}{5},1\right]=P_1\cdot P_2,$$

$$\mu_2(4)=P_2\mu_1\left[\frac{3}{5},1\right]=P_2\cdot P_2=P_2^2.$$

这里的质量就是密度函数. 其小块质量之和为1，即为不变测度.

§4　非均匀的分形

前面§1我们介绍了三个多尺度系统的例子，说明对这样的系统必须要用到分数维(5.5)式，这是客观描述的需要，所以才引入分形的概念. 对于像映射(5.15)式构造出来的康托尔集合就是不等比的康托尔集合，如图5.7.

它不像传统的康托尔集合，去掉中间的$\frac{1}{3}$，而是对单位长度的线段，左边保留 $r_1=\frac{1}{4}$长度，右边保留 $r_2=\frac{2}{5}$长度. 去掉中间的$\frac{7}{20}$. 此时，用同一个尺子 r 去度量，就不像传统的康托尔集合，左边和右边



图 5.7 不等比的康托尔集合

量出来的数目一样了. 设用 r 为尺子量左边得到的数目为 $N_1(r)$，量右边得到的数目为 $N_2(r)$，则

$$N(r) = N_1(r) + N_2(r), \tag{5.16}$$

但是由于每一小段和一个大段是自相似的，因此用 r 的 $\frac{1}{4}$ 倍(即 r_1)去量左段和用 r 的 $\frac{2}{5}$ 倍(即 r_2)去量右段，都应该和用 r 去量大段是一样的，即

$$N_1(r_1 \cdot r) = N_2(r_2 \cdot r) = N(r) = r^{-D}. \tag{5.17}$$

例如，用 $r=\frac{1}{20}$ 去量长度 1 得 $N=20$，用 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{20}$ 去量长度为 $\frac{1}{4}$ 的左段也得到 $N_1=20$，用 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{20}$ 去量长度为 $\frac{2}{5}$ 的右段也得到 $N_2=20$.

由(5.17)式得到

$$N_1(r) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-D}, \quad N_2(r) = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-D}. \tag{5.18}$$

将(5.17)和(5.18)式代入(5.16)式得到

$$r^{-D} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-D} + \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-D}$$

或者

$$r_1^D + r_2^D = 1, \tag{5.19}$$

将这个公式推广到 N 个不同比例尺度的结果有

$$r_1^D + r_2^D + \cdots + r_N^D = 1. \tag{5.20}$$

下面给几个例子.

例 4 由(5.15)式构成不等比的康托尔集合.

取 $r_1=\frac{1}{4}$，$r_2=\frac{2}{5}$，代入(5.19)式得到

$$\left(\frac{1}{4}\right)^D+\left(\frac{2}{5}\right)^D=1, \tag{5.21}$$

令 $\left(\frac{1}{4}\right)^D=x$，则 $\left(\frac{2}{5}\right)^D=x^{0.66}$，方程(5.21)变为

$$x+x^{0.66}=1,$$

解得：$x=0.43=\left(\frac{1}{4}\right)^D$，故 $D=0.611$.

例 5　构成逻辑斯蒂映射.

由通用关系

$$g(x)=-\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right], \tag{5.22}$$

若取 $g(0)=1$，则周期倍分岔过程也就相当于康托尔集合一分为二的过程. 则由(5.22)式取 $x=0$，则

$$1=g(0)=-\alpha g[g(0)]=-\alpha g(1),$$

所以对 1 作变换后得到

$$g(1)=-\frac{1}{\alpha}. \tag{5.23}$$

在(5.22)式中取 $x=1$，得到

$$-\frac{1}{\alpha}=g(1)=-\alpha g\left[g\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

即

$$g\left[g\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right]=\frac{1}{\alpha^2}. \tag{5.24}$$

(5.23)和(5.24)式表明，尺度为 1 经过周期倍分岔分出两段，尺寸各为 $\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{\alpha^2}$. 因此代入(5.19)式得

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^D+\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^D=1,$$

求出 $D=0.537$.

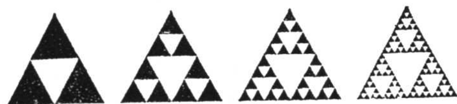
习　题

1. 构造一个康托尔集合，将单位长度去掉中间一半长度，并求

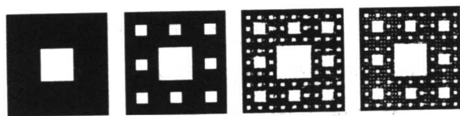
其分数维.

2. 下列图形是构造分形的前几个阶段,分别求它们的分数维.(这些图形可理解为大涡旋中有小涡旋)

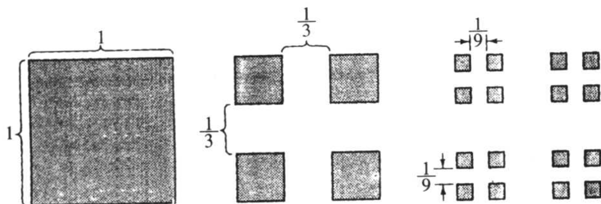
(a)



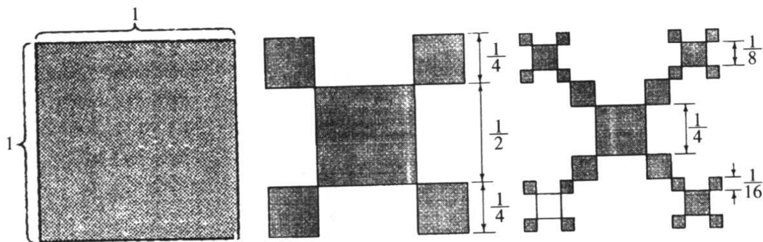
(b)



(c)



(d)



3. 对下列函数迭代系统:

$$x_{n+1}=\begin{cases}3x_n, & x_n\leqslant 0.5,\\ 3-3x_n, & x_n>0.5,\end{cases}$$

说明当初值 x_0 取为 $\frac{1}{3}<x_0<\frac{2}{3}$,迭代的结果是发散,而只有康托尔集合中的点,如 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$,映射的结果全部留下来.

4. 迭代映射

$$x_{n+1}=\begin{cases}5x_n+4, & x_n\leqslant -0.4,\\ -5x_n, & -0.4\leqslant x_n\leqslant 0.4,\\ 5x_n-4, & x_n\geqslant 0.4,\end{cases}$$

说明哪些初值 x_0 使迭代的点在[−1,1]内?

5. 映射

$$x_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x_n,\\ \dfrac{1}{4}x_n+\dfrac{3}{4},\end{cases}$$

$x_n\in[0,1]$,构造出什么形式的康托尔集合?

6. 请举出几个多尺度系统的例子.

第六章　标度对称性

上一章我们谈到了多尺度系统的描述方法，我们看到尺度的重要性. 海岸线的长度、气候的冷暖、湍流涡旋的个数(或概率)等都随着尺度变化. 这些多尺度系统在实际问题中更常见，它们常常以随机信号(现在我们常称为混沌信号)出现，这些信号只所以成为随机，也是因为其中含有大大小小不同的尺度. 我们这一章要讨论尺度变换后的不变性，即标度不变性，或称为标度对称性. 在自然界对称性是普遍存在的，但本章首次提到标度对称性.

§1　噪　　声

研究随机信号总要提到分子布朗运动，布朗运动的平均位移方差$\langle x^2(t)\rangle$和时间成正比，即

$$\langle x^2(t)\rangle \propto t, \tag{6.1}$$

从物理学知道，它的自相关系数为

$$R(\tau)=\frac{\langle x(t)\cdot x(t+\tau)\rangle}{\langle x^2(t)\rangle}=\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T}}, \tag{6.2}$$

是一个指数函数，其中 T 称为特征时间.

自相关函数 $R(\tau)$的傅里叶变换即为功率谱，

$$S(f)=\int_0^\infty R(\tau)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}f\tau}\mathrm{d}\tau \propto f^{-2}, \tag{6.3}$$

形如(6.3)式的谱是一种噪声宽带谱，所以布朗运动也称褐色噪声，其中 f 是频率.

若设随机信号的傅里叶变换为 $\hat{x}(f)$，即

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat{x}(f)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f, \tag{6.4}$$

则功率谱 $S(f)$就是其傅里叶变换系数模的平方，即

$$S(f)=|\hat{x}(f)|^2 \propto f^{-\beta}, \tag{6.5}$$

其中 β 称为功率谱指数. 对布朗运动，$\beta=2$.

将(6.4)式微商一次得到

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}f)\cdot\hat{x}(f)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}ft}\mathrm{d}f,\tag{6.6}$$

将(6.6)式与(6.4)式比较看出,微商后被积函数则由 $\hat{x}(f)$ 变成 $\mathrm{i}f\hat{x}(f)$,故微商后的随机信号$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$的功率谱为

$$S(f)_{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}}=|\mathrm{i}f\hat{x}(f)|^2\propto f^{-\beta+2}=f^{-(\beta-2)},\tag{6.7}$$

即微商后功率谱指数则由 β 变成 $\beta-2$.

因此,布朗运动微商的信号的功率谱则由 $\beta=2$ 变成 $\beta=0$,即功率谱为 $S(f)=f^0$,这是白噪声的功率谱.所以我们常说的噪声是布朗运动噪声的一次微商结果.反过来,褐色噪声是白噪声一次积分的结果.而一般处在白噪声和褐色噪声之间的噪声,即 $0<\beta<2$,则称为 $1/f$ 噪声.这三种噪声及相应的功率谱见图 6.1.

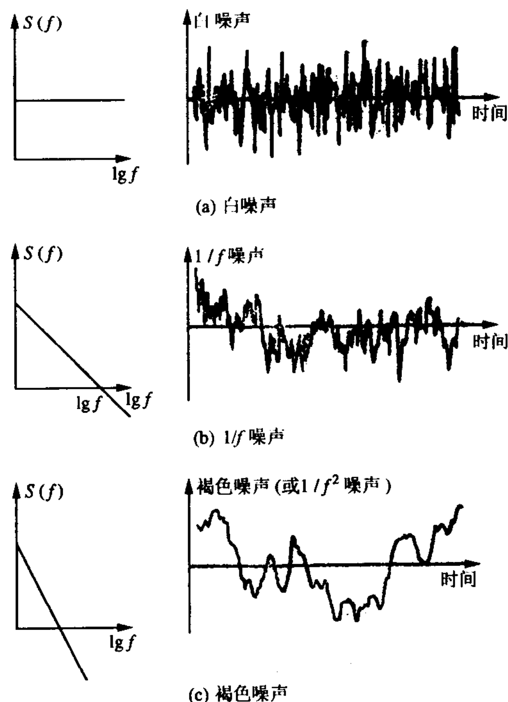


图 6.1　三种噪声及相应的功率谱

同样,信号微分 n 次后的功率谱指数为 $\beta-2n$,积分 n 次后的功率谱指数为 $\beta+2n$. 因此,若以白噪声信号开始,积分多少次才能使 β 由 0 增加到 $\frac{5}{3}$ 呢? 显然由 $0+2n=\frac{5}{3}$,得到 $n=\frac{5}{6}$,即积分 $\frac{5}{6}$ 次.

同样,若从布朗噪声 $\beta=2$ 开始,问要微商多少次才能使 β 由 2 减少到 $\frac{5}{3}$ 呢? 显然由 $2-2n=\frac{5}{3}$,得到 $n=\frac{1}{6}$,即积分 $\frac{1}{6}$ 次. 关于分数次导数和积分的概念将在第九章涉及一点.

§2 分数维布朗运动

分数维布朗运动就是将布朗运动方差的表达式(6.1)普遍化,设成

$$\langle x^2(t)\rangle \propto t^{2\alpha}, \tag{6.8}$$

其中 α 叫标度指数. 当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时就是普通的布朗运动.

从量纲考虑,$t^{2\alpha}$ 是能量的量纲,而 $f\cdot S(f)$ 也是能量的量纲,两个量纲相等,得到

$$f\cdot S(f) = f\cdot f^{-\beta} = t^{2\alpha} = \left(\frac{1}{f}\right)^{2\alpha} = f^{-2\alpha}, \tag{6.9}$$

由此得到

$$\beta = 2\alpha + 1. \tag{6.10}$$

因此,只要 $0<\alpha<1$,那么 $1<\beta<3$ 有可能成为分数. 我们把符合(6.8)式的 $0<\alpha<1$ 的运动称为分数维布朗运动.

对(6.8)式的分数维布朗运动,我们常将随机信号 $x(t)$ 写成

$$x(t) \propto t^{\alpha}, \tag{6.11}$$

应该指出,这里的标度指数 α,并不意味着随机信号 $x(t)$ 是时间 t 的幂函数,而是指随机信号 $x(t)$ 和随机信号 $\frac{x(\lambda t)}{\lambda^{\alpha}}$ 在统计上没有区别,常写成

$$x(t) \xlongequal{\text{在统计意义上}} \frac{x(\lambda t)}{\lambda^{\alpha}}. \tag{6.12}$$

为了验证(6.12)式,我们把(6.12)式右端的重新标度的随机信

号写成 $Y(t)=ax(\lambda t)$. 例如取 $\lambda=\frac{1}{2}$,那么 $x\left(\frac{1}{2}t\right)$ 就表示 t 方向上伸长两倍才相当于原有信号 $x(t)$ 的 $t=1$. 但是信号 $Y(t)$ 的振幅是 $x(\lambda t)$ 的 a 倍. $Y(t)$ 信号的平方位移就正比于 $a^2(\lambda t)^{2\alpha}=a^2\lambda^{2\alpha}t^{2\alpha}$. 为了保证和原有信号(6.8)式同样的比例常数,则要求 $a^2\lambda^{2\alpha}=1$,即 $a=\frac{1}{\lambda^\alpha}$. 得证. 对布朗运动信号, $\alpha=\frac{1}{2}$,则 $a=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$. 即表示要将原来信号的振幅放大 $\sqrt{2}$ 倍. 图 6.2(a),(b),(c),(d)依次是以水平尺度上 2 倍、垂直幅度上 $\sqrt{2}$ 倍逐一放大的布朗运动曲线. 它们彼此统计上没有区别.

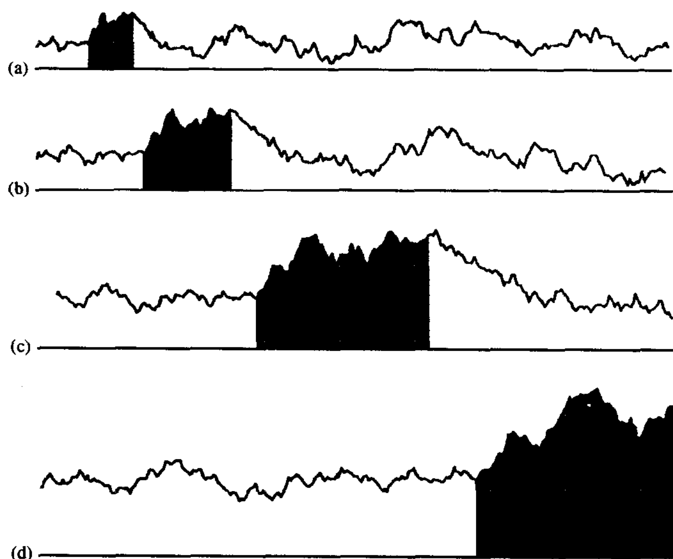


图 6.2　重新标度的布朗运动(阴影部分是不同阶段的同样形状)

下面我们来看这种分数维布朗运动的随机信号的分数维. 由于它们处在二维平面 $(t,x(t))$ 上,因此一般维数 D 是处在 1 和 2 之间.

因为 $x(t)$ 和 $\frac{x(2t)}{2^\alpha}$ 统计上是不变的,因此对区间 $t\in[0,1]$ 上的信号 $x(t)$,用尺度为 r 的小方块量出是 N 个. 现在若用尺度为 $\frac{r}{2}$ 的

小方块去量，那么在区间 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$内，由于尺度变化，$x(t)$在区间 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$内的范围（相当于由图 6.2(b)到 6.2(a)），则是$x(t)$在区间 $t\in[0,1]$内的$\frac{1}{2^\alpha}$倍. 因此，在区间 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$内，以$\frac{r}{2}$尺度的小方块共量出 $2\cdot\frac{N}{2^\alpha}$个小方块. 另一半区间 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$也同样量出 $2\cdot\frac{N}{2^\alpha}$个小方块. 所以共量出 $2^{2-\alpha}N$ 个小方块. 同理，用$\frac{r}{4}=\frac{r}{2^2}$尺度的小方块应量出$(2^{2-\alpha})^2N$ 个. 一般用尺度为$\frac{r}{2^k}$的小方块应量出$(2^{2-\alpha})^kN$ 个.

按照分数维的定义(5.5)式，分数维 D 应为

$$D=\lim_{k\to\infty}\frac{\lg[(2^{2-\alpha})^kN]}{\lg\frac{2^k}{r}}=2-\alpha,\tag{6.13}$$

(6.13)式得到分数维 D 和标度指数 α 的关系，由于 $0<\alpha<1$，所以 $1<D<2$.

将(6.13)式代入(6.10)式就得到功率谱指数 β 和 D 的关系：

$$\beta=2\alpha+1=2(2-D)+1=5-2D.\tag{6.14}$$

§3 物理学中的标度不变性

上章(5.11)式已经说明，尺度由 r 变到 λr 后，物理量存在自相似性，或者倍数关系，其倍数中的量 D 是不变的，这就是尺度变换的不变性，即标度不变性或标度对称性.

在物理学的临界现象中，也会有标度不变性. 像(5.12)式一样，此时相关长度 ξ 可以表示为

$$\xi\propto(T-T_c)^{-\nu},\tag{6.15}$$

其中 T_c 是临界温度. 因此对尺度$(T-T_c)$作变换后，ξ 变成如(5.11)式的形式：

$$\xi[\lambda(T-T_c)]=\lambda^{-\nu}\xi(T-T_c).\tag{6.16}$$

在湍流中，两点相距为 r 的速度差 $\Delta v(r)$是一个随机信号，它们

的标度指数 α 经前苏联科学家 Kolmogorov 研究为 $\alpha=\frac{1}{3}$，即

$$\Delta v(r) \propto r^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{3}. \tag{6.17}$$

因而，1941 年 Kolmogorov 得到二阶结构函数 $\langle(\Delta v(r))^2\rangle$ 和功率谱 $S(k)$ 有如下规律：

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v(r))^2\rangle &\propto r^{\frac{2}{3}}, \\ S(k) &\propto k^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

标度指数 α 和功率谱指数 $\beta=\frac{5}{3}$ 符合式(6.10).

从(6.18)式也得到尺度变换的不变性：

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v(\lambda r))^2\rangle &= \lambda^{\frac{2}{3}}\langle(\Delta v(r))^2\rangle, \\ S(\lambda k) &= \lambda^{-\frac{5}{3}} \cdot S(k). \end{aligned} \tag{6.19}$$

其中"$\frac{2}{3}$"和"$-\frac{5}{3}$"是不变量.

在(5.10)式中，我们提到万有引力 $f(r)\propto\frac{1}{r^2}$，质量为 m 的物体若受到万有引力的作用，那么牛顿第二定律就可以表示为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{M \cdot m}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{6.20}$$

其中，M 可以代表物体 m 所在的月球或地球的质量，G 是引力常数，V 是势能.

从(6.20)式看出，物体 m 在月球上和地球上所受到的重力加速度 a_{m} 和 a_{e} 都是$\frac{M}{r^2}$的函数，我们若将$\frac{M}{r^2}$看做是一种尺度 $l=\frac{M}{r^2}$，问质量 m 的物体在月球上所受的重力加速度和在地球上所受的重力加速度之比为多少？

由于月球质量是地球质量的$\frac{1}{81}$，月球半径是地球的$\frac{1}{3.7}$，故两种尺度之比 $\lambda=\frac{l_{\mathrm{m}}}{l_{\mathrm{e}}}=\frac{1/81}{(1/3.7)^2}\approx\frac{1}{6}$，因而重力加速度之比为$\frac{a_{\mathrm{m}}}{a_{\mathrm{e}}}\approx\frac{1}{6}$，这就意味着

$$a\left(\frac{1}{6}l\right) = \frac{1}{6}a(l), \tag{6.21}$$

这不是与(6.16)式及(6.19)式相类似的标度不变性吗?!

若要问逃逸月球和地球的宇宙速度之比是多少,将(6.20)式改为

$$\frac{1}{2}mv^2 = -V = \frac{M \cdot m}{r}, \tag{6.22}$$

我们将$\frac{M}{r}$看作尺度 l,那么逃逸月球的速度 v_m 和逃逸地球的速度 v_e 之比就为

$$\frac{v_m}{v_e} = \sqrt{\frac{1/81}{1/3.7}} = \frac{1}{4.7},$$

因而

$$v\left(\frac{1}{4.7}l\right) = \frac{1}{4.7}v(l). \tag{6.23}$$

再以布朗运动为例. 我们已经知道它的随机位移的标度指数 $\alpha=\frac{1}{2}$,它的标度不变的自相似关系是(6.12)式. 从物理学上知道布朗运动粒子位置 $x(t)$的概率分布是正态分布,即

$$p[x(t)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi \nu t}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\nu t}}, \tag{6.24}$$

其中 x 和 t 可以看作是尺度,我们作如下的尺度变换:

$$x \to \lambda^{\frac{1}{2}}x, \quad t \to \lambda t, \tag{6.25}$$

代入(6.24)式得到

$$p(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda t) = \lambda^{-\frac{1}{2}}p(x,t), \tag{6.26}$$

容易证明在变换(6.25)式下的总概率不变,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda t)\mathrm{d}(\lambda^{\frac{1}{2}}x) = 1. \tag{6.27}$$

这再一次说明(6.12)式两边相等的含义,以及标度指数 α 的意义.

在物理学中的临界相变中也会出现如(6.26)式的两种尺度变换的不变性. 例如铁磁相变,若 f 表示自由能,它是量纲一温度 t 和量纲一磁场 h 的函数 $f(t,h)$. 若对 t 和 h 作如下变换:

$$t \to \lambda^p t, \quad h \to \lambda^q h,$$

则 $f(t,h)$的变换为

$$f(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda f(t,h), \tag{6.28}$$

(6.28)式就是这两种尺度变换的不变性在相变中的表现.它也称为重整化群方程.容易求得它的解为

$$f(t,h) = h^{\frac{1}{q}} F_1\left(\frac{t}{h^{\frac{q}{p}}}\right) \quad 或者 \quad f(t,h) = t^{\frac{1}{p}} F_1\left(\frac{h}{t^{\frac{q}{p}}}\right), \tag{6.29}$$

其中 F_1, F_2 是变量的任意函数.

由于物理学中自旋磁化强度 m 是 f 对 h 的微商,即 $m \propto \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_t$,故由(6.28)式得到

$$\lambda^q m(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda m(t,h),$$

或 m 的自相似关系为

$$m(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda^{1-q} m(t,h). \tag{6.30}$$

若设

$$m(t,0) \propto t^\beta, \quad m(0,h) \propto h^{\frac{1}{\delta}}, \tag{6.31}$$

容易从(6.30)式得到

$$\beta = \frac{1-q}{p}, \quad \delta = \frac{q}{1-q}. \tag{6.32}$$

同样,由(6.28)式的 f 求得

磁化率:

$$\left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_t \propto \begin{cases} t^{-\gamma}, & t > 0, \\ t^{-\gamma'}, & t < 0, \end{cases} \quad (h = 0)$$

比热容:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_h \propto \begin{cases} t^{-\alpha}, & t > 0, \\ t^{-\alpha'}, & t < 0. \end{cases} \quad (h = 0)$$

类似求得

$$\gamma = \gamma' = \frac{2q-1}{p}, \quad \alpha = \alpha' = \frac{2p-1}{p}. \tag{6.33}$$

由此导得标度指数间的关系为

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \gamma = \beta(\delta - 1). \tag{6.34}$$

(6.34)式是二阶相变中普适的关系.

§4 Navier-Stokes 方程的标度不变性

热传导方程(一维)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{6.35}$$

和黏性流体的 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{6.36}$$

是连续介质力学中很重要的方程. 其中,T 是介质的温度,κ 是热传导系数,$\boldsymbol{v}$ 是速度向量,ρ 是密度,p 是压力,ν 是黏性系数.

我们对(6.35)式作尺度变换(请注意(6.25)式),

$$x'=\lambda^{\frac{1}{2}}x,\quad t'=\lambda t,\quad T'=\lambda^{-\frac{1}{2}}T, \tag{6.37}$$

显然方程形式不变,即 x',t',T'满足同样的方程(6.35). 由(6.37)式得到

$$T(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}T(x,t). \tag{6.38}$$

(6.38)式说明,作时间-空间的尺度变换后,温度随时空尺度而变化,但存在标度不变性. 请注意它和(6.26)式相同.

现在对(6.36)式作如下尺度变换:

$$x'=\lambda x,\quad t'=\lambda^{1-\alpha}t,\quad v'=\lambda^{\alpha}v,$$

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)'=\lambda^{2\alpha}\left(\frac{p}{\rho}\right),\quad \nu'=\lambda^{\alpha+1}\nu, \tag{6.39}$$

其中 x 代表包括 x,y,z 的空间尺度. 则方程(6.36)的形式仍不变. 由(6.39)式导得时空尺度变换的自相似关系

$$v(\lambda x,\lambda^{1-\alpha}t)=\lambda^{\alpha}v(x,t). \tag{6.40}$$

由于湍流能量耗散率 ε(即单位时间所耗散的湍流动能)有

$$\varepsilon\propto\frac{v^3}{x}, \tag{6.41}$$

所以由(6.39)式,意味着对 ε 作了如下的尺度变换:

$$\varepsilon'\propto\frac{\lambda^{3\alpha}}{\lambda}\varepsilon=\lambda^{3\alpha-1}\varepsilon, \tag{6.42}$$

(6.42)式意味着当 $\alpha=\frac{1}{3}$ 时，ε 本身是不变的. 这就是 1941 年 Kolmogorov 的结果(6.17)式.

§5 长尾巴 Levy 分布和长程相关

在物理学中通常遇到长尾巴分布，就是说随机变量 x 的数值很大时仍然有一定的概率. 如北京的年降水总量为 500～600 mm，但某一天有 50～100 mm 的降水也有很大可能. 这就造成了扩散方差并不像(6.1)式那样慢，而实际上扩散得很快.

对 Kolmogorov 湍流，由(6.17)式

$$\Delta v \propto \varepsilon^{\frac{1}{3}} \cdot r^{\frac{1}{3}}, \tag{6.43}$$

且时间 t 用量纲分析得

$$t \propto \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \cdot r^{\frac{2}{3}}, \tag{6.44}$$

所以扩散方差

$$\langle r^2 \rangle \propto t^3. \tag{6.45}$$

这就比(6.1)式的布朗运动要扩散得快很多，在物理学中称为异常扩散，请参看第九章.

这种异常扩散的长尾巴概率分布称为 Levy 分布，

$$p(x) \propto c x^{-\alpha-1} \quad (|x| \text{ 较大}), \tag{6.46}$$

其中 c 称为尾参数，$0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Levy 分布也称为 α 稳定分布. 特别当 $\alpha=1$ 时，

$$p(x) = \frac{1}{x^2 + \pi^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{6.47}$$

叫柯西分布. $\alpha=2$ 时是正态分布(6.24)式. $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的概率分布为

$$p(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-1/2x}}{(2x)^{3/2}}, \quad x \in (0, +\infty). \tag{6.48}$$

图 6.3 是在双对数坐标上 $\alpha=2$(正态分布)、$\alpha=1$(柯西分布)和 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的概率. 从图中看出，$\alpha\neq 2$ 时 $x>10$ 后仍有相当大的概率.

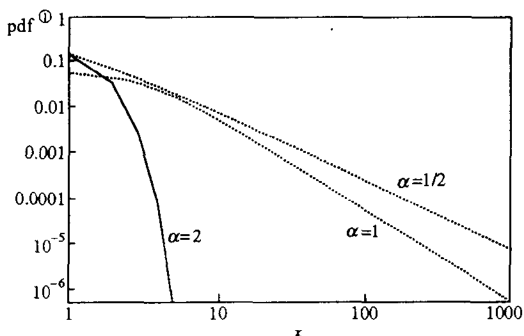


图 6.3 双对数坐标下的不同 α 时的概率密度

由于 Levy 分布是幂函数，因此对(6.46)式作尺度变换：

$$x' \to c^{\frac{1}{\alpha}} x, \tag{6.49}$$

则得到自相似关系：

$$p(c^{\frac{1}{\alpha}} x) = c^{-\frac{1}{\alpha}} p(x), \tag{6.50}$$

或者

$$p(x)\mathrm{d}x = p(x')\mathrm{d}x'. \tag{6.51}$$

Levy 分布的一个重要性质是它的方差 $\langle x^2 \rangle$ 常常是发散的.

为了说明状态分布和 Levy 分布的区别，我们举两个直观的例子. 若问某个人的身高是你的身高两倍的概率是多少？因为身高是典型的状态分布，因而主要的概率集中在平均身高附近，显然两倍身高的概率基本上是零. 但是，若要问某个人的健康是你身体健康的两倍的概率是多少？显然可能有两倍、十倍，甚至于为几百倍，因此概率还是有非零的.

由于 Levy 分布描述了大的涨落的概率，大的涨落必然带来较长时间的记忆，因而长程相关和 Levy 分布一样，长程相关必然引起扩散的加强，因为位移 $x(t)$ 和速度 $v(t)$ 的关系可以写成

$$x(t) = \int_0^t v(t')\mathrm{d}t',$$

① pdf，即概率密度函数.

因而距离方差

$$\frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle}{\mathrm{d}t}=\left\langle 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\rangle=\langle 2xv'\rangle=2\int_0^t\langle v(t)v'(t')\rangle\mathrm{d}t'. \tag{6.52}$$

令 $t'-t=\tau$,则(6.52)式成为

$$\frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle}{\mathrm{d}t}=2\langle v'^2\rangle\int_0^t R(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{6.53}$$

其中 $R(\tau)=\frac{\langle v(t)v(t+\tau)\rangle}{\langle v^2(t)\rangle}$是相关函数.

若长程相关的相关函数为

$$R(\tau)\propto\tau^{-\beta},\quad \beta\in(0,1), \tag{6.54}$$

由(6.53)式就得到

$$\langle x^2\rangle\propto t^{2-\beta}, \tag{6.55}$$

和(6.1)式比较,扩散显然加大了.

§6　Haar 标度函数和建筑块

到现在为止,这两章我们已经看到尺度的重要性.在§2中我们看到,对随机变量 $x(t)$和 $x(2t)$,后者尺度是前者尺度的一半.

现在我们介绍 Haar 标度函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1],\\ 0, & t\notin[0,1],\end{cases} \tag{6.56}$$

它的图像如图 6.4.

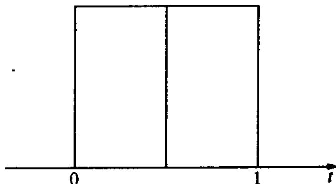


图 6.4　Haar 标度函数

从图 6.4 看出,它是一个方波,和正(余)弦波不同,这个标度函数是局部的,而正(余)弦波是铺开到整个 t 轴.

我们来看函数 $\varphi(2t)$的图像.由(6.56)式,$0\leqslant t\leqslant 1$,因而$\varphi(2t)$函

数定义在区间 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，所以说函数 $\varphi(2t)$ 的尺度是函数 $\varphi(t)$ 尺度的一半.

再来看函数 $\varphi(2t-1)$. 因为 $0\leqslant 2t-1\leqslant 1$，即函数 $\varphi(2t-1)$ 定义在区间 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，它的尺度仍是函数 $\varphi(t)$ 的一半，是 $\varphi(2t)$ 图像向右位移半个单位的结果. 因此我们得到一个简单关系：

$$\varphi(t)=\varphi(2t)+\varphi(2t-1), \tag{6.57}$$

(6.57)式将两种不同尺度的函数联系在一起，所以称为两尺度关系.

类似地，函数 $\varphi(2^n t)$ 的尺度是函数 $\varphi(t)$ 尺度的 $\frac{1}{2^n}$. 函数 $\varphi(2^n t-1)$，$\varphi(2^n t-2)$，…，$\varphi(2^n t-k)$ 分别代表将函数 $\varphi(2^n t)$ 向右依次移动 $\frac{1}{2^n}$，$\frac{2}{2^n}$，…，$\frac{k}{2^n}$ 个单位.

我们设想一个混沌时间序列 $f(t)$，共有 2^n 个数据 $a_k(k=0,1,2,\cdots,2^n-1)$. 它们分别处在 2^n 个等距离的间隔上. 根据 $f(t)$ 的性质，那么该时间序列就可以写成

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2^n-1}a_k\varphi(2^n t-k), \tag{6.58}$$

所以函数 $\varphi(2^n t-k)$ 就好像是一个杂乱无章信号的建筑块.

将一维函数 $\varphi(t)$ 推广到二维：

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.59}$$

它好像是一个方的积木块.

同样，我们定义其尺度是 $\varphi(x,y)$ 一半的长的积木块：

$$\varphi(2x,2y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.60a}$$

$$\varphi(2x,2y-2)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x< 1,\frac{1}{2}\leqslant y< 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.60b}$$

$$\varphi(2x-1,2y)=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,0\leqslant y<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{6.60c}$$

$$\varphi(2x-1,2y-1)=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\frac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(6.60d)

它们构成了一个二维信号 $f(x,y)$ 的基本建筑块，通过 $\varphi(x,y)$ 的尺度缩小和平移，像(6.58)式一样，信号 $f(x,y)$ 就是由这些积木块叠起来的，二维基本建筑块如图 6.5.

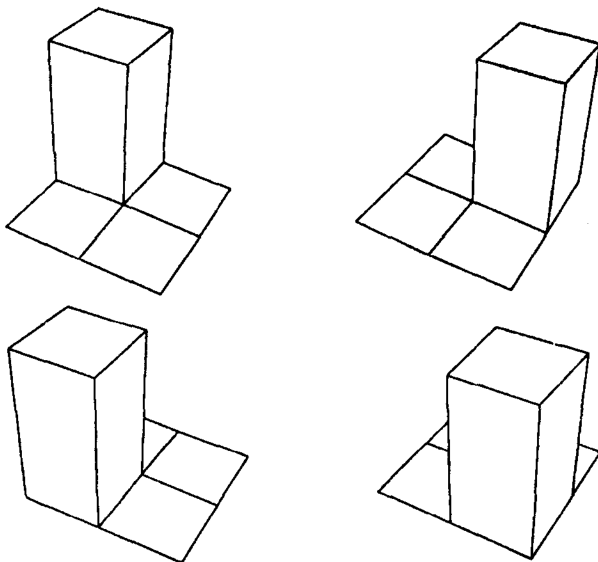


图 6.5 二维基本建筑块

习 题

1. 给定一个布朗随机序列，选取不同的尺度放大或缩小，按(6.12)式统计两端的概率密度.

2. 请举出你所知道的多尺度系统的序列，求出其维数 D、标度指数 α、功率谱指数 β，并按(6.12)式统计两端的概率密度.

3. 求出自相似方程(6.40)的解.

4. 从物理学上分析长尾巴分布引起加强扩散以及长程相关(请参看第九章).

第七章　混沌与结构

混沌和分形最基本的特征是多尺度，混沌通过伸长和折叠而形成多尺度，分形正是无特征尺度系统的现象．由于多尺度，它必然由大大小小不同尺度建筑成美丽的结构．第六章我们已经介绍了一种长方形砖块（Haar 标度函数）作为建筑块，这一章我们还要介绍螺旋结构、树枝状结构等自然界许多现象的建筑块．细胞核是螺旋缠绕的结构，携带基因的核酸或 DNA 是一种双螺旋结构，台风是一个螺旋结构，许多树木叶子的生长次序也是螺旋结构．本章我们介绍这些结构是如何生成的，以及它与混沌和分形的关系．

§1　分形结构

第五章我们已经看到迭代函数系统（5.13）式和康托尔集合相对应，下面我们研究更为一般的迭代函数，

$$\begin{cases} x' = ax + by + e, \\ y' = cx + dy + f, \end{cases} \tag{7.1}$$

在（7.1）式中，若 $e=f=0, a=d=\cos\alpha, b=-c=-\sin\alpha$，则（7.1）式可写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

此时（7.2）式代表一个旋转变换，它将 Oxy 坐标系中的点旋转一个角度 α.

若 $e=f=0, b=c=0, a=d$，则（7.1）式化简为

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay, \end{cases} \tag{7.3}$$

（7.3）式将一个线段 OP 变成线段 OP'，若 $|a|<1$，则（7.3）式代表收缩变换．

若 $e=f=0, b=c=0, a=-d$，则(7.1)式化简为

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = -ay, \end{cases} \tag{7.4}$$

此变换将平面(x,y)上一点通过 x 轴镜面反射到另一边，然后再收缩($|a|<1$).

(7.1)式中的 e 和 f，表示 Oxy 坐标系中的原点$(0,0)$被平移到(e,f). 所以(7.1)式代表旋转加上尺度变换.

正像(5.13)式一样，对于给定一个初始图像 A，通过 N 个迭代函数系统 $w_1, w_2, \cdots, w_N$，将 A 变换成许多小的拷贝，那么这些变换的和集

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \cdots \cup w_N(A) \tag{7.5}$$

就产生了新的结构，W 称为 Hutchinso 算子.

例如，

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

它将直角边长为 1 的直角三角形变换成直角边长为$\frac{1}{2}$的三个小直角三角形. 虽然每个变换的收缩因子是$\frac{1}{2}$，每个变换将三角形的面积缩小$\frac{1}{4}$，最后的 W 的吸引子就是 Sierpinski 海绵结构，见图 7.1.

应当指出，(7.1)式右端的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{7.7}$$

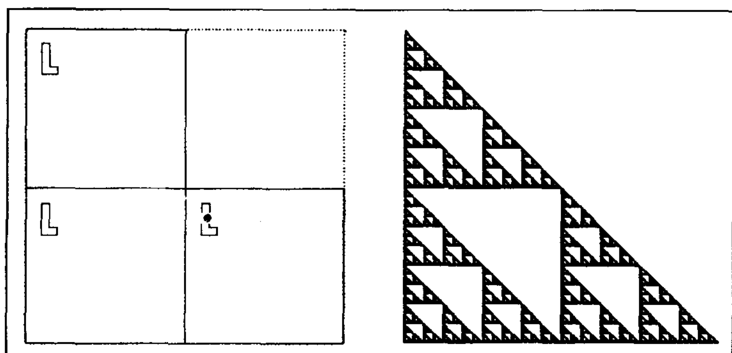


图 7.1 Sierpinski 海绵结构

代表面积的收缩比.

因为(7.1)式的系数矩阵总可以写成如下形式：

$$\begin{pmatrix} r_1\cos\theta_1 & -r_2\sin\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 & r_2\cos\theta_2 \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

其中(r_1,θ_1)是点(a,c)的极坐标，即

$$r_1=\sqrt{a^2+c^2},\quad \theta_1=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

同理，(r_2,θ_2)是点(b,d)的极坐标，即

$$r_2=\sqrt{b^2+d^2},\quad \theta_2=\arccos\frac{b}{\sqrt{b^2+d^2}}.$$

下表给出了(7.8)式的 w_1,w_2,w_3,w_4 的 $r_1,r_2,\theta_1,\theta_2$ 和 e,f.

W	r_1	r_2	θ_1	θ_2	e	f
w_1	0.85	0.85	−2.5°	−2.5°	0.0	1.6
w_2	0.30	0.34	49°	49°	0.0	1.6
w_3	0.30	0.37	120°	50°	0.0	0.44
w_4	0.00	0.16	0°	0°	0.0	0.0

图 7.2 是(7.8)式所产生的蕨类植物的叶子结构.

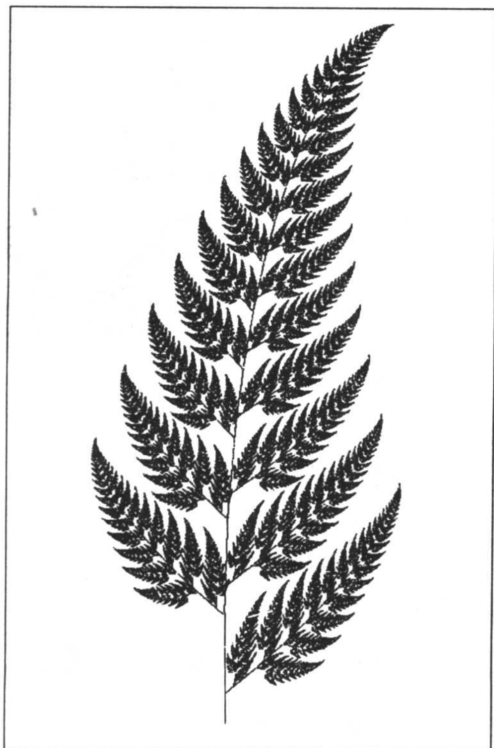


图 7.2　(7.8)式产生的蕨类植物叶子

图 5.3 是一个大涡旋分成三个小涡旋的串级过程,也可以由如下三个迭代函数系的和集完成:

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

若初始图像 A_0 是一个单位正方形，则

$$W \equiv w_1 \cup w_2 \cup w_3, \quad A_{n+1} = W(A_n), \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{7.10}$$

的吸引子就是图 5.3.

正如不均匀的康托尔集合(图 5.6)一样，为了反映质量分布的不均匀性，有时在每个迭代函数系统 $w_i(i=1,2,\cdots,N)$，加带一个概率 $p_i(i=1,2,\cdots,N)$，且 $\sum_{i=1}^{N} p_i=1$.

对(7.6)式所示的系统，变换后的小三角形的面积显然为原来三角形面积的 $\frac{1}{4}$，所以它们分别和三个小三角形的总面积之比为

$$p_i = \frac{\frac{1}{4}}{3 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \ (i = 1,2,3), \tag{7.11}$$

这里 $p_1=p_2=p_3$，也可以形成 $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ 的非均匀的 Sierpinski 海绵.

例如，由下表所示的形如(7.10)式的四个迭代函数系统，则长出了一个如图 7.3 的分形树.

W	a	b	c	d	e	f	p
w_1	0	0	0	0.5	0	0	0.05
w_2	0.42	−0.42	0.42	0.42	0	0.2	0.4
w_3	0.42	0.42	−0.42	0.42	0	0.2	0.4
w_4	0.1	0	0	0.1	0	0.2	0.15

由此可见，由迭代函数系统的和集产生了许多复杂美丽的结构，显然这种结构是多尺度的，并且具有标度不变性.

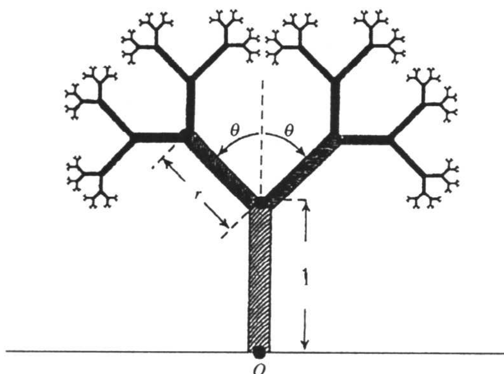


图 7.3 由迭代函数系统(7.10)式 $n=4$ 时长出的分形树

§2 螺旋结构

螺旋结构在自然界是普遍存在的.从第三章我们可以看出,平面上焦点的出现主要是由于有黏性力.单摆在无阻尼时的轨道是一个圆,而有阻尼时的轨道则是一个螺旋.

平面上最常见的螺旋是阿基米德螺旋和对数螺旋(或增长螺旋).若取极坐标(r,θ),则阿基米德螺旋表示为

$$r = a\theta, \tag{7.12}$$

对数螺旋表示为

$$r = \mathrm{e}^{a\theta} = \Psi^{a}, \quad \Psi = \mathrm{e}^{\theta}. \tag{7.13}$$

这两种螺旋有什么差别呢?图 7.4 绘制了螺旋轨道上的三个连续的

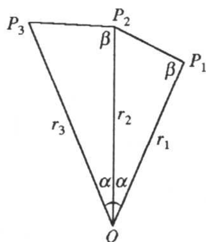


图 7.4 螺旋轨道上的三个连续点 P_1,P_2 和 P_3

点 P_1,P_2 和 P_3,OP_1 和 OP_2 之间的夹角等于 OP_2 和 OP_3 之间的夹角.

对阿基米德螺旋,由(7.12)式得

$$r_2 - r_1 = a(\theta_2 - \theta_1) = a\alpha = r_3 - r_2 = a(\theta_3 - \theta_2), \tag{7.14}$$

因此

$$r_2 = \frac{r_1 + r_3}{2}, \tag{7.15}$$

(7.15)式说明 r_2 是 r_1 和 r_3 的算术平均.

对于对数螺旋,由(7.13)式得

$$\ln r_3 - \ln r_2 = \ln r_2 - \ln r_1,$$

即
$$\ln \frac{r_3}{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_1},$$

或者
$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad 即 \quad r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}, \tag{7.16}$$

上式说明,r_2 是 r_1 和 r_3 的几何平均. 在图 7.4 中,由于$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_3}}$,所以,$\triangle OP_1P_2$ 和$\triangle OP_2P_3$ 是相似的.

从尺度上考虑,(7.12)和(7.13)式分别满足

$$r(\lambda\theta) = a(\lambda\theta) = \lambda a\theta = \lambda r(\theta), \tag{7.17}$$

$$r(\lambda\Psi) = (\lambda\Psi)^a = \lambda^a\Psi^a = \lambda^a r(\Psi), \tag{7.18}$$

因此,若将 θ 和 Ψ 看做尺度,它们可以变化好多数量级,那么阿基米德螺旋和对数螺旋都符合标度对称性.

§3 与 Fibonacci 数有关的自然结构

前面我们已经知道由映射

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (F_0 = F_1 = 1) \tag{7.19}$$

所产生的数列 1,1,2,3,5,8,13,21,…,就是 Fibonacci 数. 自然界的许多结构和 Fibonacci 数有关,特别和上一节提到的螺旋结构有关.

例如,依次由 Fibonacci 数作边长构成矩形(如图 7.5),并在矩形上作$\frac{1}{4}$圆弧连接,所得到的曲线就是螺旋线.

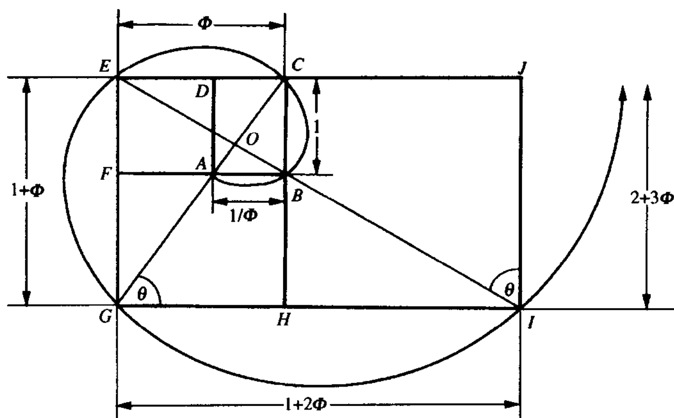


图 7.5　由 Fibonacci 矩形圆弧构成的螺旋线

另外,相邻两个 Fibonacci 数之比的极限称为黄金分割数,它是一个有意义的数. 将(7.19)式两边同除以 F_{n+1},并取

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi, \tag{7.20}$$

则得到

$$\Phi=1+\frac{1}{\Phi}, \tag{7.21}$$

或

$$\Phi^2-\Phi-1=0, \tag{7.22}$$

(7.22)式的其中一个根 $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618$,这就是黄金分割数.

图 7.5 中最初有一个长和宽分别为 1 和 $\frac{1}{\Phi}=0.618$ 的矩形作为种子,然后有一系列长宽比均为 Φ 的矩形,即

$$\begin{aligned}\Phi&=\frac{1+\Phi}{\Phi}=\frac{1+2\Phi}{1+\Phi}=\frac{2+3\Phi}{1+2\Phi}\\&=\frac{3+5\Phi}{2+3\Phi}=\cdots,\end{aligned} \tag{7.23}$$

那么由连续矩形对角线顶点构成的螺旋就是对数螺旋.

注意图中的 O 点是极坐标的原点,从图中看出,角度旋转 $\frac{\pi}{2}$,则

向径就增加 Φ. 所以由(7.13)式有

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right)=r_0\Phi=r_0 e^{a\frac{\pi}{2}},$$

即

$$e^{a\frac{\pi}{2}}=\Phi,\quad 或\quad a=\frac{2\ln\Phi}{\pi}=\frac{2\ln 1.618}{\pi}=0.3064. \tag{7.24}$$

图 7.6 是树叶生长的螺旋结构,从图中看出,树叶生长的次序(序号在图中标出)是逆时针旋转,每次旋转角度为

$$0.618\times 2\pi=222.49^\circ \tag{7.25}$$

就作出一个新叶,树叶的尖尖形成螺旋向内的螺旋结构.

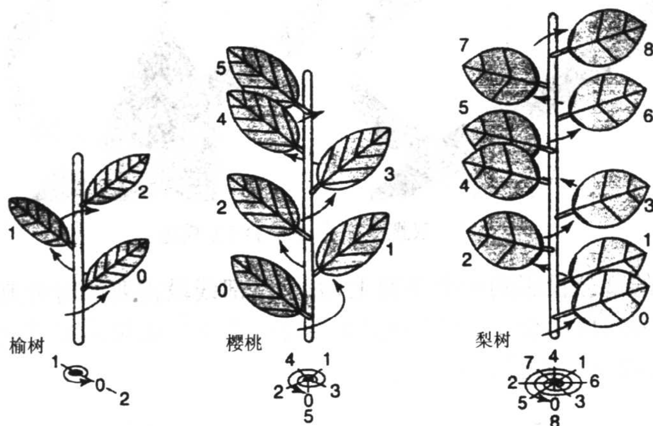


图 7.6 树叶生长的螺旋结构

§4 双 螺 旋

大家知道,DNA 呈双螺旋结构,两条核酸链缠绕在一个共同的轴上,但两条链的原子顺序的走向相反. 若每条链代表 DNA 的闭合环状分子时,则形成闭合环状 DNA 模型. 如图 7.7. 这两条链是连环的,即如果不断开任何一链,它们不会分开.

为了描述这两条闭合键相互缠绕而"穿过"的次数,我们引入一个数 L_k,称为缠绕数. 为了计算 L_k,我们把每条闭线与另一条闭线相

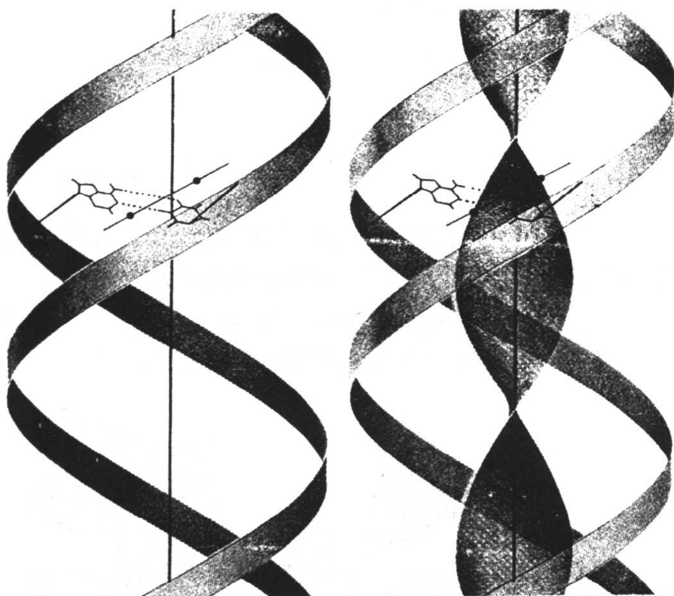


图 7.7　双螺旋闭合环状 DNA 模型

互交叉的部分投影到一个平面上，如果顶部线段需要顺时针旋转才能与底部线段相合，那么这一交叉点就标为+1；如果需要逆时针旋转，则标以−1. 见图 7.8.

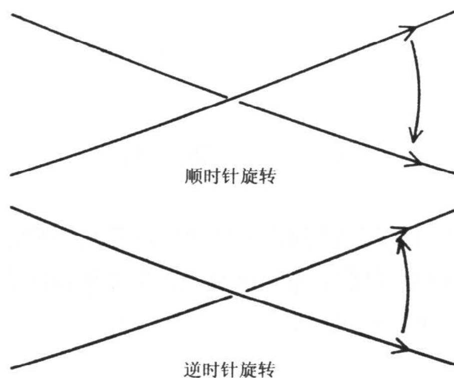


图 7.8　两个线相互交叉点的符号规则

然后把这些$+1$或-1的数统统加起来，再除以2(闭合曲线的数目)，就得到这两个闭环的缠绕数L_k. 图7.9(a),(b),(c)分别是$L_k=0,1$和2的两个闭环的缠绕方式.

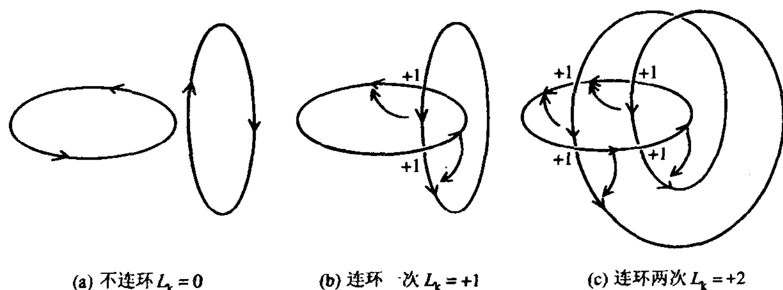


图7.9 不同连环的缠绕数L_k

刚才我们分析了两个键相互连环的情况，现在分析由两条键组成的缎带的盘绕方式，即缎带是如何扭转的. 我们定义一个总盘绕数T_w，顺时针盘绕360°的值为$+1$，逆时针盘绕360°的值为-1. 为了理解T_w这个数值，用一些垂直于缎带轴的小箭头放在缎带上并指向一条边键. 当小箭头沿盘绕的缎带移动时，它们就绕轴旋转；对缎带轴被限制在一个平面内的特殊情况，T_w就是箭头沿缎带移动时绕轴转动的次数. 图7.10中可以看到$T_w=0$和$T_w=+1$两种情况.

给定缠绕数L_k和盘绕数T_w后，1968年White证明缎带的缠绕数(也称连环数)与总盘绕数T_w之差，是由缎带轴曲线规定的一个量W_r，它称为扭曲数，即

$$W_r = L_k - T_w.$$

图7.11显示了两条缎带的三个数之间的关系.

在三维空间(x,y,z)中，螺旋线(helix)的最基本的速度场是

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = b, \end{cases} \tag{7.26}$$

将(7.26)式中第一式乘以$2x$，第二式乘以$2y$，再将两式相加得到

$$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad 即 \quad x^2+y^2=a^2, \tag{7.27}$$

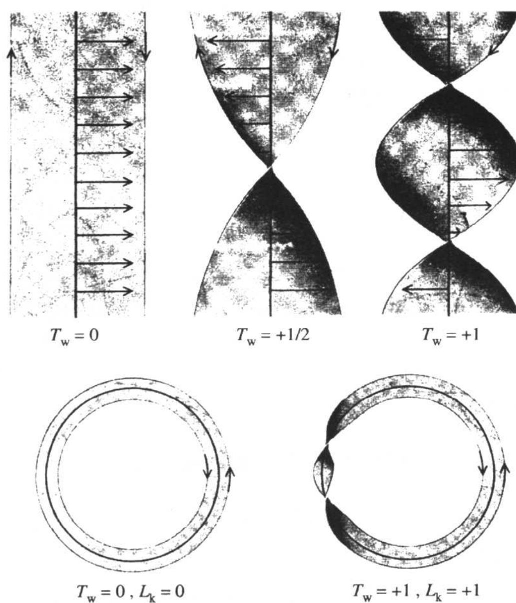


图 7.10 缎带的盘绕数

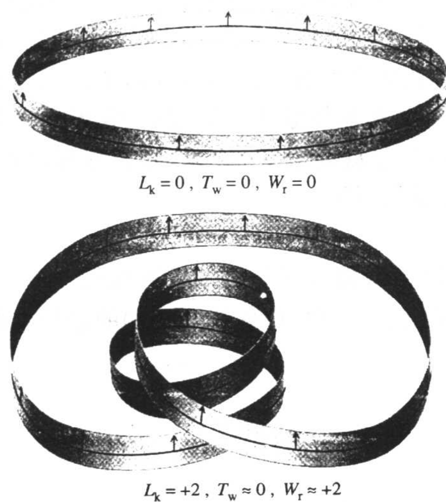


图 7.11 两条缎带的三个数 W_r, L_k, T_w

上式在三维空间中代表柱面.

从(7.26)式的第一和第二式中消去 y 得

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{7.28}$$

因此,x,y,z 的解为

$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \\ z = bt. \end{cases} \tag{7.29}$$

将(7.29)式中前两式相除,并利用第三式得

$$\frac{x}{y} = \tan t = \tan\frac{z}{b}, \tag{7.30}$$

这就是空间螺旋线的基本方程,它可以看成是柱面((7.27)式)和螺旋面((7.29)式)的交线.

§5 反应扩散系统中的各种斑图

斑马身上有斑纹,猎豹身上有斑点.动物身上为什么会有各种各样的斑图?这个问题虽然复杂,但是科学家们认为,在生物胚胎发育过程中,原来比较均匀的黑素(皮肤细胞中含有一种由黑色素细胞产生的有色分子)与其他反应物发生生物化学反应,同时在体内扩散,在一定条件下,会在空间自发地组织成像斑纹、斑点等类型的周期性非均匀的黑素结构.从分岔的观点看,这种均匀结构转变成非均匀结构就是形态的分岔,常称为图灵(Turing)分岔.我们以 Brusselator 模型为例,两种反应物的浓度 u,v 随时间的变化满足下列反应扩散方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + D_u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = g(u,v) + D_v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{7.31}$$

其中 $f(u,v)=\alpha+u^2v-(1+\beta)u$, $g(u,v)=\beta u-u^2v$ 代表非线性反应项.(7.31)两式右端第二项代表扩散项,D_u 和 D_v 分别为扩散系数.与第三章讨论的不同之处在于,此处的状态变量 u,v 既随时间又随空间变化.

若令(7.31)式的右端为零,这代表定常状态;若又设定$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$和$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$,这就表示均匀状态.因而,定常且均匀状态满足的方程为

$$\begin{cases} f(u,v) = 0, \\ g(u,v) = 0. \end{cases} \tag{7.32}$$

对(7.31)式很容易得到定常均匀态

$$u^* = \alpha, \quad v^* = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{7.33}$$

为了讨论分岔,我们就要讨论定常均匀态(u^*,v^*)的稳定性.与第三章讨论类似,设

$$u = u^* + \delta u, \quad v = v^* + \delta v, \tag{7.34}$$

其中δu和δv为小扰动.将(7.34)式代入(7.31)式并作线性化近似得

$$\begin{cases} \frac{\partial(\delta u)}{\partial t} = [2\beta - (1+\beta)] \cdot \delta u + \alpha^2 \cdot \delta v + D_u \frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial t} = (\beta - 2\beta) \cdot \delta u - \alpha^2 \cdot \delta v + D_u \frac{\partial^2(\delta v)}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{7.35}$$

与第三章类似,设

$$\begin{cases} \delta u = (\delta u)_k \cdot e^{\lambda t + ikx}, \\ \delta v = (\delta v)_k \cdot e^{\lambda t + ikx}, \end{cases} \tag{7.36}$$

将(7.36)式代入(7.35)式,得特征值λ满足方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{7.37}$$

其中,

$$\begin{aligned} p &= (\alpha^2 + 1) - \beta + (D_u + D_v) \cdot k^2, \\ q &= \alpha^2\beta - (\beta - 1 - k^2 D_u)(\alpha^2 + k^2 D_v). \end{aligned} \tag{7.38}$$

因此,若所有特征值的实部$\mathrm{Re}\,\lambda<0$,则有$\delta u \to 0$和$\delta v \to 0$,定常均匀态(u^*,v^*)是稳定的.只要有一个$\mathrm{Re}\,\lambda>0$,则定常均匀态(u^*,v^*)就不稳定,会发生分岔.

因为我们讨论的不是分岔出时间振荡的状态(此时λ有虚部),

而是讨论分岔出一个新的定常状态，即 λ 为实根，且至少有一个实根为正.

从(7.37)式看出，这有两种可能：当 $q<0$，此时 λ 为一正一负，(u^*,v^*)为鞍点；当 $p<0$，且 $p^2<4q(q>0)$，此时 λ 为两正实根，(u^*,v^*)为不稳定结点(见图 3.2)，这里不同的只是 λ 和 k 有关.

从(7.38)式看出，当 $\beta<1$ 时，$p>0,q>0$，此时，定常均匀态(u^*,v^*)是稳定的. 要发生稳定性变化(由稳定变成不稳定)，必须由 $q>0$ 时 λ 为负实数，转变为 $p<0$ 时 λ 为一正一负，即由图 3.2 的第一象限穿过 $q=0$ 到第四象限.

所以，由(7.38)式，令其为零，即

$$q(\beta,k)=0, \tag{7.39}$$

所确定的曲线见图 7.12.

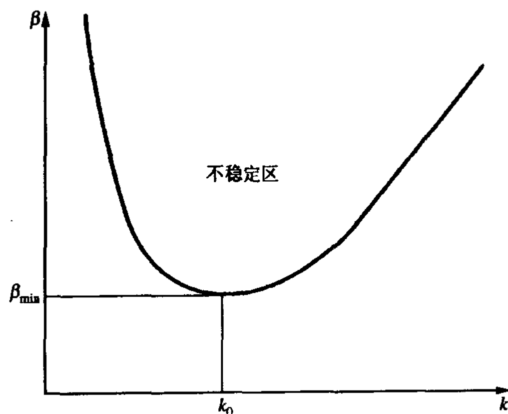


图 7.12 方程(7.39)图灵不稳定的临界曲线

将(7.39)式对 k^2 微商，并令其等于零，即

$$\frac{\partial q(\beta,k)}{\partial(k^2)}=0,$$

得到 $q(\beta,k)=0$ 的最小值，相应的 k^2 为

$$k^2=\frac{(\beta-1)D_v-\alpha^2D_u}{2D_uD_v}. \tag{7.40}$$

再用(7.39)式求到的

$$(\beta-1)D_v-\alpha^2D_u=\frac{1}{k^2}+k^2D_uD_v$$

代入到(7.40)式得到

$$k^2=\frac{\alpha}{\sqrt{D_uD_v}}\tag{7.41}$$

和 k^2 对应的 β,即将(7.41)式代入到(7.39)式得到

$$\beta_{\min}=\left(1+\alpha\sqrt{\frac{D_u}{D_v}}\right)^2,\tag{7.42}$$

总之,图灵不稳定既要求 $p>0$(对 $k=0$ 也如此),即

$$1-\beta+\alpha^2>0 \quad 或 \quad \beta-1-\alpha^2<0,\tag{7.43}$$

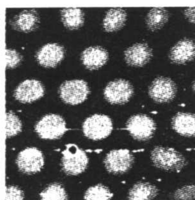
还要求 $q<0$,由(7.42)式得

$$(\beta-1)\frac{D_v}{D_u}-\alpha^2>2\alpha\sqrt{\frac{D_v}{D_u}},\tag{7.44}$$

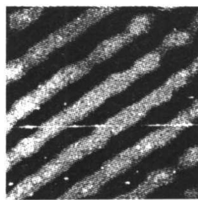
这就要求

$$D_v\gg D_u.\tag{7.45}$$

(7.45)式意味着,反应物 u 的扩散系数 D_u 要远小于反应物 v 的扩散系数 D_v. 反应物 u 称为"活化子",它存在加速其本身的反应,即自催化机制;而反应物 v 称为"禁阻子",它的作用与自催化相反. 所以,常常说图灵失稳是扩散引起的失稳. 图 7.13 给出了六边形的斑点和条状斑图.



(a) 斑点



(b) 斑纹

图 7.13 图灵斑图

§6 湍流层次结构

从第五章我们已经看到，湍流由大涡旋不断串级成各种不同尺度的小涡旋，尺度愈小，小涡旋占据的空间体积（或概率）愈小，但强度极强. 同样，在不均匀的康托尔集合中，我们也看到，尺度愈小，各种不均匀质量的奇异性（强度）有很大差别. 对湍流而言，意味着湍流速度场的涨落

$$\Delta\nu_l = \nu(x+l) - \nu(x) \tag{7.46}$$

随着尺度 l 的大小不同而形成不同的层次结构.

若按照涨落的概率密度 $P(|\Delta\nu_l|)$来讲，大涨落的概率就比较小，为了反映大涨落的作用，我们用$|\Delta\nu_l|$的 p 次方$|\Delta\nu_l|^p$ 来加权而得到一个新的概率密度

$$\begin{aligned} Q_p(|\Delta\nu_l|) &= \frac{|\Delta\nu_l|^p \cdot P(|\Delta\nu_l|)}{\int |\Delta\nu_l|^p \cdot P(|\Delta\nu_l|) \cdot \mathrm{d}|\Delta\nu_l|} \\ &= \frac{|\Delta\nu_l|^p}{\langle|\Delta\nu_l|^p\rangle} P(|\Delta\nu_l|). \end{aligned} \tag{7.47}$$

显然，当 p 增加到 $p+1$ 时，大涨落的作用愈大，直到 $p\to\infty$时，Q_p 中就只剩下最强的涨落起作用了.

于是以 $Q_{p+1}(l)$为概率密度的数学期望 $E_{p+1}(l)$，按量纲分析有

$$E_{p+1}(l) = E_p(l)^\beta \cdot E_\infty(l)^{1-\beta}, \tag{7.48}$$

其中 β 是一个参数. 显然若 $\beta=1$，则 $E_{p+1}(l)=E_p(l)$，那么 $p+1$ 和 p 的数学期望完全相同，因而是均匀结构. 若 $\beta=0$，那么任何 p 都是最强涨落决定的结构. 所以说 $0\leqslant\beta\leqslant1$ 是反映层次结构的参数.

我们设 p 阶结构函数 $S_p(l)=\langle|\Delta\nu_l|^p\rangle$的标度指数为 ξ_p，$E_\infty(l)$的标度指数为 γ，即

$$S_p(l) = \langle|\Delta\nu_l|^p\rangle \propto l^{\xi_p}, \quad E_\infty(l) \propto l^\gamma. \tag{7.49}$$

因为

$$E_p(l) = \int |\Delta\nu_l| \cdot Q_p(|\Delta\nu_l|) \cdot \mathrm{d}|\Delta\nu_l|$$

$$= \frac{\int |\Delta\nu_l|^{p+1} \cdot P(|\Delta\nu_l|) \cdot \mathrm{d}|\Delta\nu_l|}{\int |\Delta\nu_l|^{p} \cdot P(|\Delta\nu_l|) \cdot \mathrm{d}|\Delta\nu_l|}$$

$$= \frac{S_{p+1}(l)}{S_p(l)}, \tag{7.50}$$

由于(7.50)式,(7.48)式变成

$$\frac{S_{p+2}(l)}{S_{p+1}(l)} = \left(\frac{S_{p+1}(l)}{S_p(l)}\right)^{\beta} E_{\infty}(l)^{1-\beta}, \tag{7.51}$$

将(7.49)式代入(7.51)式得到

$$\frac{l^{\xi_{p+2}}}{l^{\xi_{p+1}}} = \left(\frac{l^{\xi_{p+1}}}{l^{\xi_p}}\right)^{\beta} = (l^{\gamma})^{1-\beta},$$

或者

$$\xi_{p+2} - \xi_{p+1} = \beta(\xi_{p+1} - \xi_p) + \gamma(1-\beta), \tag{7.52}$$

(7.52)式是非齐次二阶差分方程.令

$$\xi_p = \gamma p + c + f(p), \tag{7.53}$$

代入(7.52)式得

$$\begin{aligned}\gamma(p+2) + c + f(p+2) - \gamma(p+1) - c - f(p+1) \\ = \beta[\gamma(p+1) + c + f(p+1) - \gamma(p) - c - f(p)] \\ + \gamma(1-\beta),\end{aligned}$$

即

$$f(p+2) - (1+\beta)f(p+1) + \beta f(p) = 0. \tag{7.54}$$

所以,非齐次差分方程(7.52)化成了齐次差分方程(7.54).

(7.54)式的解为

$$f(p) = -c\beta^p, \tag{7.55}$$

所以(7.53)式变成

$$\xi_p = \gamma p + c(1-\beta^p), \tag{7.56}$$

(7.56)式就是湍流的层次结构模型.

根据 p 阶结构函数的定义,

$$S_p(l) = \int |\Delta\nu_l|^p \cdot P(|\Delta\nu_l|) \cdot \mathrm{d}|\Delta\nu_l|, \tag{7.57}$$

由(5.9)式,上式近似为

$$S_p(l) \approx \int (l^h)^p \cdot l^{3-D} \cdot \rho(h) \cdot \mathrm{d}h \overset{l\to 0}{\propto} l^{\min\limits_h (hp+3+D)}, \quad (7.58)$$

其中 h 是 $|\Delta\nu_l|$ 的标度指数, $\rho(h)\mathrm{d}h$ 是 $\mathrm{d}h$ 内用 l 为尺子小"立方体"量得的数目.

比较(7.49)式和(7.58)式有

$$\xi_p = \min_h (hp + 3 - D), \quad (7.59)$$

由(7.59)式得到

$$h = \frac{\mathrm{d}\xi_p}{\mathrm{d}p},$$

并用(7.56)式代入得到

$$h = \gamma - c\beta^p \ln\beta. \quad (7.60)$$

因而, $p\to\infty$ 时 h 取最小值 γ,即 $|\Delta\nu_l| \propto l^{h_{\min}} = l^\gamma$,这就说明 $p\to\infty$ 时,由于 $h_{\min}$, $|\Delta\nu_l|$ 是最强涨落.

同时,由(7.59)式得到

$$3 - D = \xi_p - ph = (\gamma - h)p + c(1 - \beta^p), \quad (7.61)$$

当 $p\to\infty$ 时, $3-D=c$ 取最大值,因而 D 取最小值 $D_{\min}$.

由(5.9)式得

$$P(l) \propto l^{3-D_{\min}}, \quad (7.62)$$

(7.62)式说明, $p\to\infty$ 时,最强涨落所占的体积最小(或概率最小).

习 题

1. 请构造按和集(7.5)式的各种结构.

A.

a	b	c	d	e	f
0.000	0.577	−0.577	0.000	0.0951	0.5893
0.000	0.577	−0.577	0.000	0.4413	0.7893
0.000	0.577	−0.577	0.000	0.0952	0.9893

B.

a	b	c	d	e	f
0.000	−0.500	0.500	0.000	0.5000	0.0000
0.000	0.500	−0.500	0.000	0.5000	0.5000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.2500	0.5000

C.

a	b	c	d	e	f
0.333	0.000	0.000	0.333	0.333	0.666
0.000	0.333	1.000	0.000	0.666	0.000
0.000	−0.333	1.000	0.000	0.333	0.000

D.

a	b	c	d	e	f
0.387	0.430	0.430	−0.387	0.2560	0.5220
0.441	−0.091	−0.009	−0.332	0.4219	0.5059
−0.468	0.020	−0.113	0.015	0.4000	0.4000

E.

a	b	c	d	e	f
0.255	0.000	0.000	0.255	0.3726	0.6714
0.255	0.000	0.000	0.255	0.1146	0.2332
0.255	0.000	0.000	0.255	0.6036	0.2232
0.370	−0.642	0.642	0.370	0.6356	−0.0061

F.

a	b	c	d	e	f
0.382	0.000	0.000	0.382	0.3072	0.6190
0.382	0.000	0.000	0.382	0.6033	0.4044
0.382	0.000	0.000	0.382	0.0139	0.4044
0.382	0.000	0.000	0.382	0.1253	0.0595
0.382	0.000	0.000	0.382	0.4920	0.0595

G.

a	b	c	d	e	f
0.195	−0.488	0.344	0.443	0.4431	0.2452
0.462	0.414	0.252	0.361	0.2511	0.5692
−0.058	−0.070	0.453	−0.111	0.5976	0.0969
−0.035	0.070	−0.469	−0.022	0.4884	0.5069
−0.637	0.000	0.000	0.501	0.8562	0.2513

2. 如何理解混沌是结构的源泉？

3. 将本章的均匀定常态和第二章的定常态作比较.

4. 从物理学上阐述螺旋结构的原因.

5. 说明湍流的最强涨落结构就是 $p\to\infty$ 的标度指数 h 和分数维 D 都取最小值.

6. 请分析如下速度场的螺旋结构：

$$\begin{cases}\dot{x}=-ax-by,\\ \dot{y}=-ay+bx,\\ \dot{z}=az.\end{cases}$$

第八章　时间序列≠轨道

第二章和第三章告诉我们，一个非线性的离散和连续动力系统是否存在混沌，是从它们的轨道 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 或者 $(x(t), y(t), z(t))$ 来判断的. 物理空间的轨道真正反映状态演化的速度场，轨道的切线方向就代表速度方向. 状态空间的轨道就反映状态随时间变化的过程. 实际问题中，我们经常会得到一系列系统状态随时间演化的观测数据，它们能代表一个动力系统的状态随时间的变化吗？

§1　为什么要重构相空间

大家知道，单摆方程为

$$\ddot{x}+x=0 \quad 或 \quad \begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x, \end{cases} \tag{8.1}$$

由(8.1)式得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \quad 或 \quad x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0,$$

所以，在状态(相)空间 (x,y) 中，单摆的轨道是一个圆，如图 8.1，其方程为

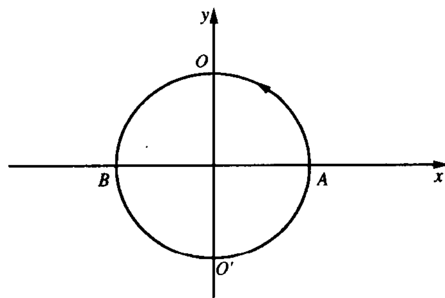


图 8.1　状态空间 (x,y) 中单摆的轨道

$$x^2+y^2=C. \tag{8.2}$$

因此,任何一个时刻的位置及其速度 $y=\dot{x}$,就是按照图 8.1 中的箭头移动所决定的.相空间(x,y)中的每一点(x,y)只有一个位置 x 和一个速度 y.

但是方程(8.1)的一个解却是

$$x=\sin t, \tag{8.3}$$

是一个时间序列.例如,按图 8.1 的箭头 $A\to O\to B\to O'\to A\to\cdots$,得到时间序列

1,0,−1,0,1,0,−1,0,1,0,−1,0,1,0,−1,0,1,0,−1,0,⋯

从时间轴上看如图 8.2 所示.

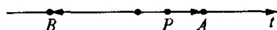


图 8.2

这是时间 t 轴上 A,B 两点之间的来回振荡.这种振荡的情况并不是轨道,因为它们在某一点上(如 P 点)既可能向左,也可能向右运动,也就是说在同一时刻 t,它们可能有不同的位置 x 或者速度 $y=\dot{x}(t)$.这与轨道的概念,即某一时刻只有惟一的位置和速度相矛盾,也是和实际状态的演化相抵触的.实际上,时间序列只是图 8.1 的圆形轨道在 x 轴的投影!所以,我们不能把这种投影构成的时间序列看成是一个动力学系统的轨道.因此,时间序列并不能代表系统状态随轨道的演化.

如何用一个单变量的时间序列构造系统的相空间呢?

对一个 n 维自治动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases} \tag{8.4}$$

其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$就是该系统状态(相)空间的坐标.

也可以对(8.4)式微商消去 $x_2,\cdots,x_n$,得到 x_1 的 n 阶微分方程

$$x_1^{(n)}=f(x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1,\cdots,x_1^{(n-1)}). \tag{8.5}$$

此时，状态空间的坐标就由 x_1 的各阶导数$(x_1, \dot{x}_1\ \ddot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)})$或者$(\dot{x}_1, \ddot{x}_1, \cdots, x_1^{(n-1)}, x_1^{(n)})$来代替，这种替代并不损失该动力系统演化的信息. 导数就是由不同时刻的时间序列值

$$x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \cdots, x(t+(n-1)\tau) \tag{8.6}$$

的差构成的，其中 τ 称为延迟参数.

$x(t+\tau)$就是 $x(t)$微商的结果，即 $x(t+\tau)=x(t)+\dot{x}(t)\cdot\tau$，同样 $x(t+2\tau)$可以认为是二阶微商的结果，因为 $\ddot{x}$ 近似可以表示成为 $\ddot{x}\approx\dfrac{x(t+2\tau)-2x(t+\tau)+x(t)}{2\tau}$，其他类似. 所以，(8.6)式的各个值，可以认为是 x 的各阶微商的结果，因此由(8.6)式的时间序列来构造相空间是合理的.

§2　Takens 定理

时间序列已经有很长的研究历史，并已经有广泛的应用. 那么为什么现在还要嵌入一个相空间?传统的统计方法中，大部分使用线性模型，因此不能得到最新的非线性动力学的研究成果. 现在已经广泛认识到，即使最简单的非线性机制也能产生复杂的时间变化状态——混沌，和复杂的混沌时间序列. 传统的统计方法一点也认识不到混沌时间序列是由确定的系统产生，它们把这种时间序列归结为随机噪声，因此，用传统的统计方法去模拟和预测这些时间序列往往导致失败，并不能产生重要有用的信息.

然而，Takens 发现从一个未知的确定的动力系统所产生的时间序列中能够重构出该未知系统的动力学形式，这就大大加强了研究混沌时间序列方法的基础.

如果原来动力系统的吸引子的维数是 d_A，得到一列观测数据

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \tag{8.7}$$

那么，用这些数据(时间序列)来重构的相空间，该相空间的维数 n 为多少呢? 例如 $n=3$，即

$$(x_0, x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), \cdots, \tag{8.8}$$

也可以是

$$(x_0,x_2,x_4),(x_1,x_3,x_5),(x_2,x_4,x_6),\cdots, \tag{8.9}$$

(8.8)式的延迟时间是 τ,(8.9)式的延迟时间是 2τ.

Takens 定理的回答是嵌入的维数 n 满足

$$n \geqslant 2d_A + 1. \tag{8.10}$$

对于这个定理我们不予证明,只加以说明.设集合 A 和 B 的维数分别为 d_A 和 d_B,那么集合 A 和 B 的交集的维数 $d_{A\cap B}$是多少?若把该问题放在 d 维空间来讨论,那么集合 A,B 和 $A\cap B$ 的余维(co-dimension)数分别为

$$d-d_A,\quad d-d_B,\quad d-d_{A\cap B},$$

余维数有好的相加性质

$$(d-d_A)+(d-d_B)=(d-d_{A\cap B}),$$

故得到

$$d_{A\cap B}=d_A+d_B-d. \tag{8.11}$$

我们可以用几个例子来验证(8.11)式的正确性.

例 1 两条曲线在平面上一般能相交吗?

因为曲线 A 和 B 的维数分别为 $d_A=d_B=1$,平面的维数 $d=2$,由(8.11)式,其交集的维数 $d_{A\cap B}=1+1-2=0$.这就说明,两条曲线在平面上一般相交成点,点的维数是零.

例 2 二维曲线在三维空间中能相交吗?

曲线 A 和曲线 B 的维数分别是 $d_A=d_B=1$,而三维空间的维数 $d=3$,由(8.11)式得 $d_{A\cap B}=1+1-3=-1$.这说明两条曲线在三维空间中一般不相交.

例 3 在三维空间中一条曲线与一个曲面能相交吗?

曲线 A 和曲面 B 的维数分别为 $d_A=1,d_B=2$,而三维空间的维数 $d=3$.由公式(8.11)得 $d_{A\cap B}=1+2-3=0$,即三维空间中的一条曲线和一个曲面一般相交于一个点.

现在我们应用(8.11)式到同样的对象 $d_A=d_B$,同时 $d_{A\cap B}=-1$,即两个集合不相交,得到

$$d=2d_A+1. \tag{8.12}$$

(8.11)式说明,嵌入空间的维数 n 一般至少是混沌吸引子维数 d_A 的

两倍.

§3　混沌和噪声

传统的统计方法把随机看成是外部噪声,而从混沌观点看,随机可能来源于非线性动力系统内部,是该非线性动力系统本身固有的.如何区别混沌和噪声呢?若是混沌,那么可以从时间序列中重构出动力系统的形式来,而噪声则不能.图 8.3 是三个随机时间序列 $z_0, z_1, z_2, \cdots$.

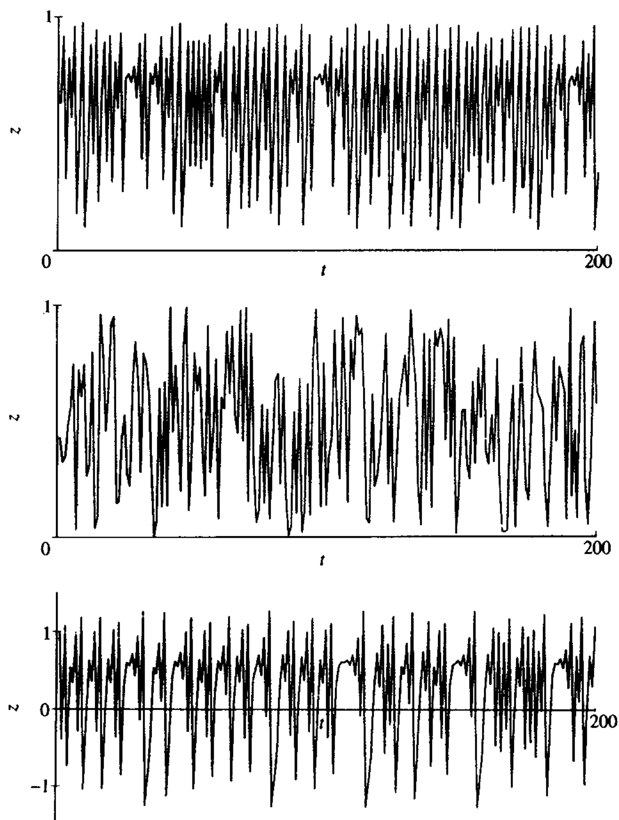


图 8.3　三种随机时间序列

上节我们已经知道，如果时间序列的每一个数之间存在确定性的关系，则 z_{k+1} 将依赖于它前面时刻的数 $z_k, z_{k-1}, \cdots$. 最简单的情况是 z_{k+1} 只依赖于 z_k，即

$$z_{k+1} = f(z_k). \tag{8.13}$$

我们以 z_k 为横坐标，以 z_{k+1} 为纵坐标重构二维相空间，这三个时间序列得到的结果如图 8.4 所示.

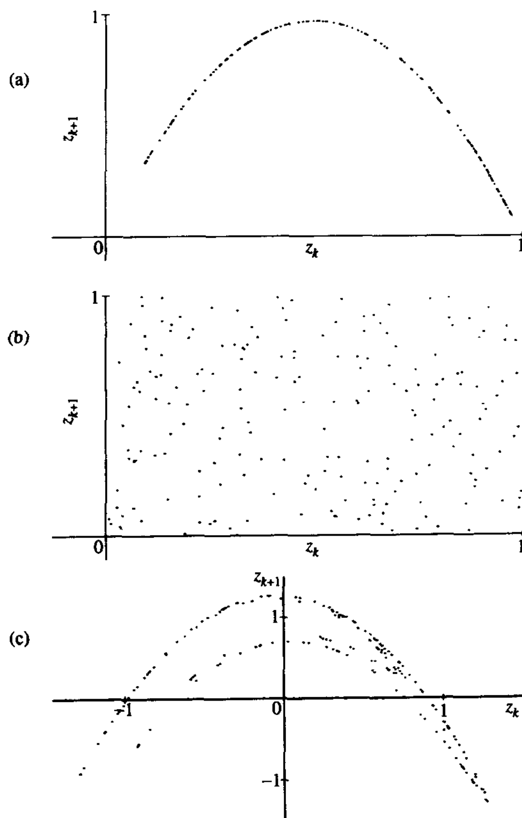


图 8.4 三个不同时间序列重构的二维图像

从图 8.4 看出，时间序列(a)明显地来自于逻辑斯蒂映射(2.1)式，带有参数 $\mu=4$. 序列(b)则没有明显的结构，它显然是一种噪声. 序列(c)不像序列(b)的点分布在二维 (z_k, z_{k+1}) 平面上，而是有明显

的结构，它也是一种混沌.

§4 延迟时间和时间序列长度

重构相空间的目的是使一个时间序列在一个合适的空间坐标系中能显示出混沌吸引子的结构.例如，三维自治动力系统（称为Rossler系统）

$$\begin{cases}\dot{x}=-(y+z),\\ \dot{y}=x+0.2y,\\ \dot{z}=0.2+xz-cz,\end{cases}\tag{8.14}$$

当参数 $c=5.9$ 时就会出现混沌.

如果用状态变量中的一个，如变量 z，去构造一个三维相空间

$$\begin{aligned}&(z(0),z(T),z(2T)),\\ &(z(\tau),z(\tau+T),z(\tau+2T)),\\ &(z(2\tau),z(2\tau+T),z(2\tau+2T)),\end{aligned}\tag{8.15}$$

其中，T 是 τ 的倍数，称为时间延迟.

现在的问题是，T 应该选择多大才合适.显然，既然是三维坐标的相空间，那么(8.15)式中的每一个空间点的三个分量应该是相互独立的.如果 T 选择太小，那么几乎 $z(T)\approx z(0)$，三个分量就几乎相等，这将导致重构的吸引子非常接近直线，见图8.5(c).

但是若 T 选择太大，则三个分量之间有比较小的相关，吸引子的轨道围绕相空间游荡，就很难看出吸引子的结构，见图8.5(b).只有适中的 T 值才能重构出Rossler吸引子的三维结构，见图8.5(a)，它很像图3.8的鞍—焦同宿轨道.

至于如何从时间序列来估计吸引子的维数，则因为在相空间中有很多点是空的，用(5.5)式方法去“数盒子”不是很有效.现在常用另外一种计算“相关维”的方法.若我们已经将时间序列嵌入到相空间中得到 N 个点.我们随便给定一个数 r，检查 N 个点中有多少“点对”(x_i,y_i)之间的距离小于 r（即在以 r 为半径的“球”内），并把距离

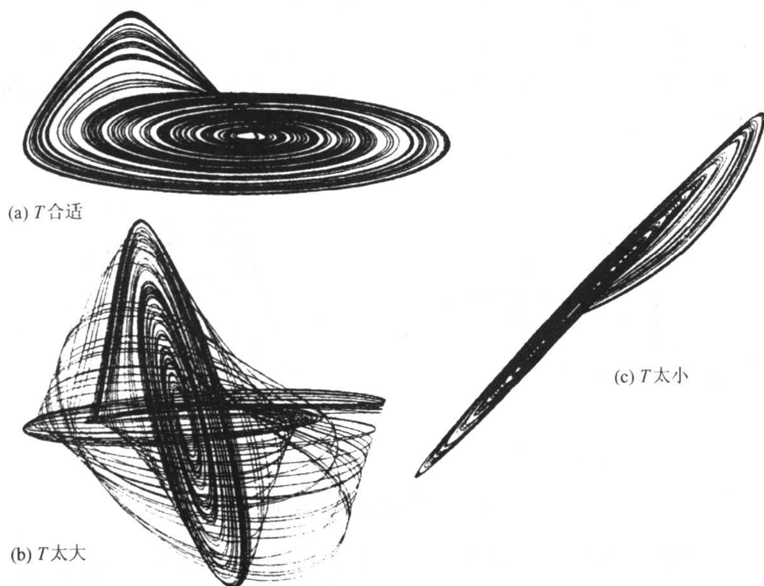


图 8.5 不同 T 值选择的重构吸引子

小于 r 的“点对”在所有“点对”(共有 N^2 个“点对”)中所占的比例计算出来,即

$$C(r) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\theta(r - \| x_i - x_j \|), \tag{8.16}$$

其中 θ 是 Heaviside 函数,它的定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{8.17}$$

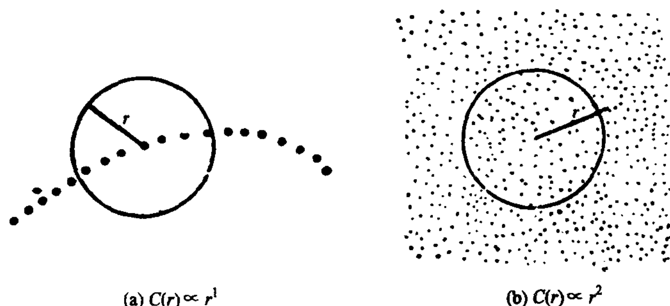
如果 r 选择太大,当然一切“点对”的距离都不会超过它,因而 $C(r) = 1$, $\lg C(r) = 0$. 因而函数 $C(r)$ 描述了随 r 增加时,小于 r 的“点对”数是如何增长的分布函数.

虽然太大的 r 反映不了系统内部的性质,适当地缩小 r,可能在某一个 r 的区间内有

$$C(r) = r^D, \tag{8.18}$$

这里的 D 就是重构相空间的吸引子的维数.

例如，均匀分布在一条线上的重构资料点，$C(r)$与r的一次方成正比，即$D=1$. 而均匀分布在一个面上的重构资料点，则$C(r)$应与r的二次方成正比，故$D=2$，见图 8.6. 因此，D值描述了重构相空间吸引子的结构.



(a) $C(r)\propto r^1$　　(b) $C(r)\propto r^2$

图 8.6 维数计算的说明

若以嵌入维数n为横坐标，吸引子的维数D为纵坐标，改变n求到的D不再改变时，此时的n就是可以作为嵌入的重构相空间的维数.

问题是时间序列的N多大时才能使得嵌入相空间的维数n较为合理. 例如$n=3$，若时间序列的点N只有10^3，这就意味着每边只有 10 个点左右，这就显得少了. 若$n=4$，则$N=10^3$就显得太少了，甚至用 1000 个点去嵌入到$n=4$的相空间去描述吸引子的结构就显得不合理了. 现在常用经验公式

$$N_{\min}\approx 10^{2+0.4n} \tag{8.19}$$

求时间序列的最小长度. 例如$n=4$，则$N_{\min}\approx 10^{3.6}\approx 4000$个点.

为了说明重构相空间的预测，我们用一个简单的个例. 给出有 18 个点的时间序列

$s(t)$：0.4100000，0.9676000，0.1254000，0.4387000，0.9849000，
0.0592100，0.2228000，0.6927100，0.8514300，
0.5059000，0.9998000，0.0005682，0.0022710，
0.0090660，0.0359300，0.1385000，0.4775000.

我们将其重构到二维相空间，取 $T=1$，如图 8.7，图中点 1 的坐标是(0.410 000 0,0.967 600 0)，点 2 的坐标为(0.967 600 0,0.125 400 0)，…，其他类似.

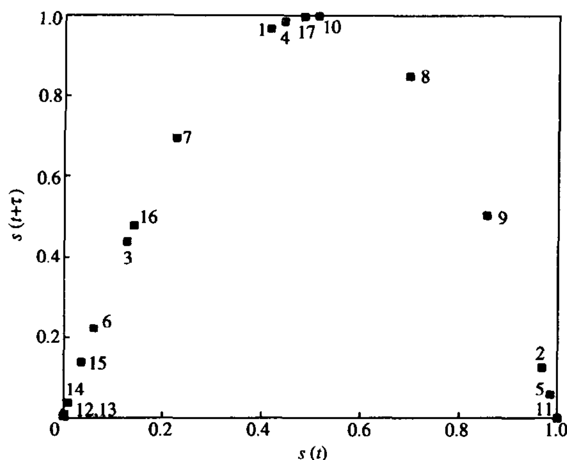


图 8.7 二维相空间重构

现在我们作预测，问第 19 个点的值 $s(19)=?$ 因为图中 17 号点的坐标为($s(17),s(18)$)，一种最简单的预测方法是找距离 17 号点最近的点，例如图中第 10 点的轨道演化应该到第 11 点，那么我们认为第 17 点的轨道演化应该到第 18 点，它应该离 11 点最近. 而第 11 点的坐标为(0.999 800 0,0.000 568 2)，因此我们预测 $s(19)=$ 0.000 568 2.

实际上，图 8.7 就是逻辑斯蒂映射，$s(19)$的真值是 $s(19)=$ 0.008 080 0，与上面预测的误差是很小的.

同学们可以试着用 18 个点的通常的时间序列预测，而不用相空间重构，此时预测的 $s(19)=?$ 并作比较.

§5 时空系统重构的设想

前面是对于一个时间序列的重构，它的理论基础是 Takens 定

理. 对于既含时间又含空间的动力系统，如反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.20}$$

其状态 u 的演化是非常复杂的. 每一个空间位置上随时间的演化和另一空间位置上随时间的演化可能是极其不同的，Takens 定理值得怀疑. 因为每一个空间位置上的状态都要受到相邻空间点上状态的影响，如(8.20)式中的扩散项(也可称为耦合项). 对如此复杂的系统，人们往往只能得到某一个空间位置上的观测资料，或者最多是几个空间位置上的观测资料. 怎么办呢？

我们可以设想，每个空间点上状态的演化，如(8.20)式中的 $f(u)$ 项是按照一定的非线性方式，如逻辑斯蒂映射 $f(u)=\mu u(1-u)$；而不同位置点的耦合，如(8.20)式中的$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$项用差分代替.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{f(u_n^{(i+1)}) - 2f(u_n^{(i)}) + f(u_n^{(i-1)})}{2}, \tag{8.21}$$

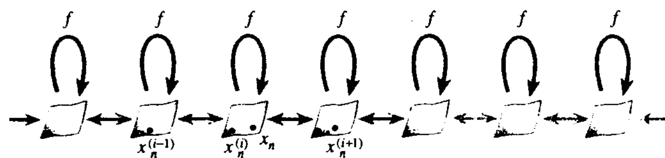
其中 u 的上标(i)表示空间位置，那么第 i 点空间位置的演化就变成

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{(i)} &\approx f_n(u_n^{(i)}) + \varepsilon \frac{f(u_n^{(i+1)}) - 2f(u_n^{(i)}) + f(u_n^{(i-1)})}{2} \\ &= (1-\varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{1}{2}\varepsilon f(u_n^{(i+1)}) + \frac{1}{2}\varepsilon f(u_n^{(i-1)}), \end{aligned} \tag{8.22}$$

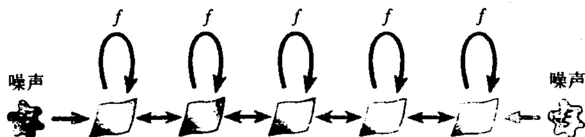
其中 u 的下标 n 表示时间.

(8.22)式称为时空演化的耦合映射格子模型. 这样，由(8.22)式产生的第 i 个位置点上状态的时间序列 $u_n^{(i)}$，就可以用时间序列重构了. 所以，(8.22)式中的参数 ε 也可以称为耦合参数.

问题是，若取 $d_A=100$ 个空间位置点，按照 Takens 定理((8.12)式)，则嵌入维数 $d=201$，这个数字太大了，太不切合实际了. 很多研究指出，由于(8.22)式中存在与相邻点的耦合作用，可以重构成比较低的维数，其他点的影响可以看成是均匀噪声的驱动，见图 8.8.



(a) 耦合映射格子



(b) 截断的映射格子

图 8.8

习　　题

1. 如何理解状态随时间的演化不是沿着时间序列、而是沿着轨道进行的？

2. 考察时空系统的复杂性与单点时间序列的区别.

3. 你能想出从时间序列构造相空间的其他办法吗？

第九章　随机游动和异常扩散

第六章中我们从多尺度角度谈到了布朗运动和分数维布朗运动. 实际中许多现象都涉及到它,例如明天的股票会涨还是会跌? 明天的温度或者明年的温度会升高还是降低? 尽管这些现象可能服从一定的确定性关系,但是表现出的涨落却是随机的、混沌性的. 而随机游动的结果就是"扩散",这里包括物质扩散、动量扩散、热量扩散等. 因此,随机游动和扩散对力学、结晶学、天文学、生物学、气象学、流体力学、经济学等都是很有用的.

§1　最简单的随机游动

随机游动(random walk)是定义在格点上的随机过程,例如一个游动者在 2 维($d=2$)的格子上游动. 每一时间间隔都以相同的概率游动到其最邻近的位置. 图 9.1 是简单的二维随机游动的轨迹. 每一时间间隔游动者游动了一个单位间隔,共游动了 10 个时间间隔,得到了三种不同的游动轨迹.

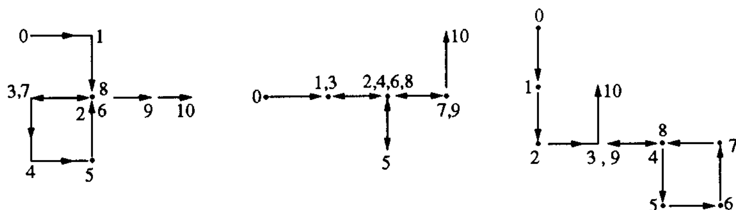


图 9.1　二维格子上简单随机游动的不同轨迹

图中的数字代表游动的顺序,箭头代表游动的方向. 那么 n 步以后的净位移

$$r(n) = \sum_{i=1}^{n} e_i, \tag{9.1}$$

其中 e_i 是第 i 步指向最邻近位置的单位向量.

因为 $\langle e_i \rangle = 0$,所以平均位移

$$\langle r(n) \rangle = 0, \tag{9.2}$$

另外,因为

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{9.3}$$

因此,平均平方位移是

$$\langle r^2(n) \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right)^2 \right\rangle = n + 2\sum_{i>j}^{n} \langle e_i \cdot e_j \rangle = n, \tag{9.4}$$

若每一步游动的时间间隔是 τ,那么 n 步游动的时间 $t = n \cdot \tau$,所以

$$\langle r^2(n) \rangle = \frac{t}{\tau}. \tag{9.5}$$

若设定格子间隔为 a,那么每一个格子点上游动的可能方向有 $2d$ 个(d 是格子维数),单位时间内游动的方差为

$$K = \frac{a^2}{(2d)\tau}, \tag{9.6}$$

其中 K 称为扩散系数,它的单位是 $m^2 \cdot s^{-1}$. 所以(9.5)式也可以改写成

$$\sigma^2 = \langle r^2(n) \rangle = \frac{(2d)K}{a^2} t, \tag{9.7}$$

当 $a=1, d=1$ 时,

$$\sigma^2 = \langle r^2(n) \rangle = 2Kt, \tag{9.8}$$

(9.8)式就是布朗运动的(6.1)式.

若 $d=1$,均方位移 $\langle r^2(n) \rangle$ 就很容易由概率密度 $P(r,t)$ 算得,即

$$\langle x^2(t) \rangle = \int x^2 P(x,t) \mathrm{d}r, \tag{9.9}$$

若游到右边的概率为 $P = \frac{1}{2}$,则游到左边的概率就是 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,那么 t 时刻后游动 m 次到右边,$(t-m)$ 次到左边,它的位移是

$$x = m - (t - m) = 2m - t, \tag{9.10}$$

那么位移的概率密度是二项式分布:

$$P(m,t)=\binom{t}{m}P^m(1-P)^{t-m}. \tag{9.11}$$

由(9.10)式得

$$m=\frac{1}{2}(x+t),\quad (t-m)=\frac{1}{2}(-x+t),$$

则(9.11)式可以写成

$$P(m,t)=\frac{t!}{m!(t-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{t-m},$$

又注意到

$$t!\approx(2\pi t)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^t, \tag{9.12}$$

则

$$\begin{aligned}P(m,t)&=\frac{\sqrt{2\pi t}t^t\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{2\pi m}m^m\mathrm{e}^{-m}\sqrt{2\pi(t-m)}(t-m)^{(t-m)}\mathrm{e}^{-(t-m)}}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{(t-m)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{t}{m(t-m)}}\frac{t^{(t-m)+m}}{m^m(t-m)^{(t-m)}}\mathrm{e}^{-t+m+(t-m)}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{(t-m)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{t}{m(t-m)}}\left(\frac{t}{2m}\right)^m\left(\frac{t}{2(t-m)}\right)^{t-m}.\end{aligned} \tag{9.13}$$

将(9.13)式右端后两个因式取对数得

$$\begin{aligned}&\ln\left[\left(\frac{t}{2m}\right)^m\left(\frac{t}{2(t-m)}\right)^{t-m}\right]\\&=-m\ln\left(\frac{2m}{t}\right)-(t-m)\ln\left(\frac{2(t-m)}{t}\right)\\&=-\frac{1}{2}(x+t)\ln\left(\frac{x+t}{t}\right)-\frac{1}{2}(t-x)\ln\left(\frac{t-x}{t}\right)\\&=-\frac{1}{2}(x+t)\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\frac{1}{2}(t-x)\ln\left(1-\frac{x}{t}\right)\\&=-\frac{1}{2}(x+t)\left[\frac{x}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2+\cdots\right]\\&\quad-\frac{1}{2}(t-x)\left[-\frac{x}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2-\cdots\right],\end{aligned}$$

若 $x\ll t$,则上式简化为 $-\frac{x^2}{2t}$,故

$$\left(\frac{t}{2m}\right)^m\left(\frac{t}{2(t-m)}\right)^{t-m}\approx \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}, \tag{9.14}$$

而(9.13)式右端的因子

$$\sqrt{\frac{t}{m(t-m)}}=\sqrt{\frac{t}{\frac{1}{4}(t+x)(t-x)}}=\sqrt{\frac{4t}{t^2-x^2}}\approx\sqrt{\frac{4}{t}}, \tag{9.15}$$

所以,(9.11)式就简化为

$$P(m,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}, \tag{9.16}$$

这正是著名的正态分布. 若考虑

$$P(m,t)\mathrm{d}m=P(x,t)\mathrm{d}x=2P(x,t)\mathrm{d}m,$$

则

$$P(m,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{9.17}$$

注意到(9.5),(9.6)和(9.8)式,若 $\tau=\frac{1}{2K}$,$K=\frac{1}{2}$,$\sigma^2=t$,则(9.17)式可写成标准的正态分布形式

$$P(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{9.18}$$

§2 长程相关引起异常扩散

随机游动的轨迹常常是多尺度的,它们可以看做是一个分形客体. 如果我们把上节游动者的位置看做是“质量”,那么游动的质量 M 就正比于时间:

$$M\propto t\propto r^{D_w}, \tag{9.19}$$

其中 D_w 称为随机游动的分数维,r 是 t 时间游动的距离. 此时的均方差位移由(9.19)式得到

$$\langle \boldsymbol{r}^2(t)\rangle\propto t^{\frac{2}{D_w}}, \tag{9.20}$$

显然,若 $D_w=2$,就是通常的布朗运动. $D_w\neq 2$ 称为异常扩散,如湍流

扩散((6.45)式).

怎么引起异常扩散呢？在上节随机游动((9.4)式)中，我们假设游动的每一步是不相关的，即$\langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$，但在实际的游动中，$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{e}_j$是相关的. 如设

$$\langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle \propto \frac{A}{|i-j|^{\gamma}}, \tag{9.21}$$

那么(9.4)式变成

$$\langle \boldsymbol{r}^2(n) \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \right)^2 \right\rangle = n + 2\sum_{i>j}^{n} \langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle = n + Bn^{2-\gamma}, \tag{9.22}$$

因此，当$\gamma<1$时，(9.22)式右端第二项占优势，则

$$\langle \boldsymbol{r}^2(n) \rangle \propto n^{2-\gamma}, \tag{9.23}$$

此时扩散就比布朗运动为大. 所以，异常扩散是由于游动的当前一步和前一步相关的结果，即长程相关(long-range correlation). 由于长程相关，由(9.20)式可得(6.8)式的标度指数

$$\alpha = \frac{1}{D_{\mathrm{w}}} = \frac{2-\gamma}{2} \quad (\gamma < 1), \tag{9.24}$$

因而功率谱指数((6.10)式)为

$$\beta = 2\alpha + 1 = 3 - \gamma. \tag{9.25}$$

在此说明，由于长程相关造成的标度指数((9.24)式)比布朗运动$\alpha=\dfrac{1}{2}$为大，功率谱指数((9.25)式)也比布朗运动$\beta=2$为大，因此相应的扩散也较强.

对照(9.23)和(6.55)式，可以看出长程相关的相关系数为

$$R(\tau) \propto \tau^{-\gamma}, \tag{9.26}$$

由于$\gamma<1$，所以τ很大时$R(\tau)$仍有一定的数值.

§3 多尺度游动引起长尾巴分布

从上节我们看出，长程相关引起了异常扩散. 正因为扩散方差大，说明大的位移比较多，这必然造成概率密度的长尾巴，如(6.46)式的Levy分布.

按照 Levy 分布，它的一阶矩或二阶矩是发散的，这就意味着没有特定的时间尺度和长度尺度，因而是无特征尺度，这就是分形现象，具有自相似和标度不变性. 这正是我们在第五、六章所论述的.

我们设想，随机游动有的只跳一个间隔，有的可以跳 3 个间隔或者更多的间隔，而且跳一个间隔和跳多个间隔的概率也不同. 例如，若空间间隔是 a，那么距一个格距 $\pm a$ 的概率设为 C，即

$$\pm a, \quad 概率 C. \tag{9.27}$$

跳 a 的 b 倍间隔的概率变小了，为 $\frac{C}{M}(M>1)$，即

$$\pm ba(b>1), \quad 概率为 \frac{C}{M}. \tag{9.28}$$

类似地，跳 a 的 b^j 倍间隔的概率为 $\frac{C}{M^j}$.

图 9.2 是 $M=4, b=3, a=1$ 的 Weierstrass 随机游动. 图中 ○ 代表游动的开始点，在一个大图中游动已完成了四步 $a=1$ 的游动（从 ○ 开始的四个小箭头），接着是 $ba=3$ 的游动（图中的较大箭头所示）. 接着又是游动 $a=1$ 的四步，游动 $ba=3$ 一步等. 游动 $a=1$ 的四步形成一个基本集团，完成 $ba=3$ 四步形成第二集团. 下一个大的跳跃是 $b^2a=9$（图中特大箭头所示）.

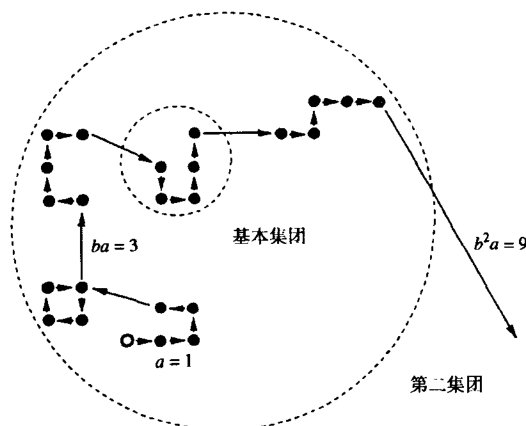


图 9.2 Weierstrass 随机游动（以 $M=4, b=3, a=1$ 为第一集团）

现在求跳跃到长度 l 的概率密度为

$$P(l) = c\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j}[\delta(l - b^j a) + \delta(l + b^j a)], \qquad (9.29)$$

通过归一化，常数 c 取值$\frac{M-1}{2M}$，故(9.29)式变为

$$P(l) = \frac{M-1}{2M}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j}[\delta(l - b^j a) + \delta(l + b^j a)], \qquad (9.30)$$

(9.30)式说明，若 M 比较大，许多跳跃到左边邻居和右边邻居的概率大约为 $C=\frac{1}{2}$. 虽然跳跃的长度增加，其概率减小，但平均讲，在跳到一个大步之前，大约 M 次小步跳跃已经完成(见图 9.2).

由于有了(9.30)式，那么二阶矩

$$\langle l^2 \rangle = \frac{(M-1)a^2}{M}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{M}\right)^j. \qquad (9.31)$$

显然只要 $b^2 > M$，那么二阶矩就发散，即 $\langle l^2 \rangle \to \infty$，这和第六章讨论的 Levy 分布是相同的.

下面我们来论证，$P(l)$是一个长尾巴的幂函数分布. 为此我们考虑 $P(l)$的傅里叶变换，

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(l)\mathrm{e}^{ikl}\mathrm{d}l = \frac{M-1}{M}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{M^j}\cos(kb^j a), \qquad (9.32)$$

$\Phi(k)$称为特征函数. (9.32)式就是著名的 Weierstrass 函数.

我们看看(9.32)式的标度方程，即

$$\Phi(bk) = \frac{M-1}{M}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{M^j}\cos(kb^{j+1}a)$$

$$= \frac{M-1}{M}\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{1}{M^j}\cos(kb^{j+1}a) - \frac{M-1}{M}\frac{1}{M^{-1}}\cos(ka),$$

令 $J=j+1$ 得

$$\Phi(bk) = \frac{M-1}{M}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{1}{M^{J-1}}\cos(kb^J a) - (M-1)\cos(ka)$$

$$= \frac{M-1}{M}\sum_{J=0}^{\infty}\frac{M}{M^J}\cos(kb^J a) - (M-1)\cos(ka)$$

$$= M\Phi(k) - (M-1)\cos(ka), \qquad (9.33)$$

(9.33)式是一个非齐次差分方程，它的非齐次部分是周期函数，不存

在奇异性(使方程发散),而齐次部分

$$\Phi(bk) = M\Phi(k) = b^{\alpha}\Phi(k) \tag{9.34}$$

的解 $\Phi(k)=k^{\alpha}\left(其中\ \alpha=\frac{\ln M}{\ln b}\right)$ 却反映了奇异状况. 所以设

$$\Phi(k) \propto (1 - ck^{\alpha}) \approx \mathrm{e}^{-c\cdot k^{\alpha}}, \tag{9.35}$$

由(9.35)式的傅里叶变换很容易得到 $P(l)$ 的形式为

$$P(l) \propto |l|^{-1-\alpha}, \tag{9.36}$$

(9.36)式就是(6.46)式的形式,所以说多尺度游动必然导致长尾巴的 Levy 分布.

§4 随机游动的朗之万方程和 Fokker-Plank 方程

从理论上讲布朗运动是受随机力 $\Gamma(t)$ 和外力 $f(x)$ 的作用,其运动方程可表示为

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = f(x) + \Gamma(t), \tag{9.37}$$

其中随机力 $\Gamma(t)$ 具有如下的统计性质:

$$\langle\Gamma(t)\rangle = 0, \quad \langle\Gamma(t)\cdot\Gamma(t')\rangle = 2K\delta(t - t'), \tag{9.38}$$

在过阻尼的情况,方程(9.37)左边主要是阻尼起作用,并设 $\alpha=1$,方程变为

$$\dot{x} = f(x) + \Gamma(t), \tag{9.39}$$

(9.39)式称为朗之万(Longevin)方程.

若考虑一维离散空间离散时间的游动,在每个时间步,游动者希望游到左边或右边的最邻近的位置,且游到左边或右边的概率均为 $\frac{1}{2}$,那么,在第 n 步位于 m 位置的概率 $P_n(m)$ 满足如下方程(见图 9.3):

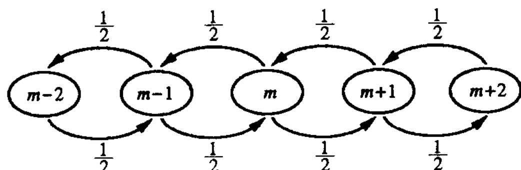


图 9.3 一维最简单随机游动概率

$$P_{n+1}(m)=\frac{1}{2}P_n(m-1)+\frac{1}{2}P_n(m+1), \qquad (9.40)$$

或者

$$P_{n+1}(m)-P_n(m)=\frac{1}{2}P_n(m-1)-P_n(m)+\frac{1}{2}P_n(m+1). \qquad (9.41)$$

若取 $x=ma,t=n\tau$,并设 $a\to 0,\tau\to 0$,那么(9.41)式的极限方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=K\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (9.42)$$

(9.42)式是一个扩散方程,(9.17)式正是它的一个解.

(9.42)式中,

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{n+1}(m)-P_n(m)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\approx\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_n(m+1)-2P_n(m)+P_n(m-1)}{(\Delta x)^2}. \qquad (9.43)$$

但是若考虑非对称游动,游到右边和左边的概率由$\frac{1}{2}$变成$\frac{1}{2}+\varepsilon$和$\frac{1}{2}-\varepsilon$,那么总的结果是游动到右边.此时扩散方程(9.42)变成

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\nu\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}+K\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (9.44)$$

(9.44)式就称为 Fokker-Plank 方程(简称 FP 方程).它是从另一角度(扩散)表征随机游动.

同样,对于有不同时间尺度的随机游动,与(9.42)式对应的方程为

$$\frac{\partial^\beta P(x,t)}{\partial t^\beta}=A\frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial x^\alpha},\quad 0<\beta\leqslant 1,\ 0<\alpha\leqslant 2, \qquad (9.45)$$

方程(9.45)称为分数维 Fokker-Plank (Fractional Fokker-Plank-Kolmogorov)扩散方程,简称 FFPK 方程.其中

$$\frac{\partial^\beta P(x,t)}{\partial t^\beta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(x,t+\Delta t)-P(x,t)}{\partial t^\beta}. \qquad (9.46)$$

对(9.45)式作傅氏变换得

$$\frac{\partial^\beta \Phi(k,t)}{\partial t^\beta} = - A|K|^\alpha \Phi(k,t), \tag{9.47}$$

$\beta=1$ 时的解为

$$\Phi(k,t) = c_0 \mathrm{e}^{-A|K|^\alpha t}, \quad 设\ \Phi(k,0) = 1, \tag{9.48}$$

其中 c_0 为常数. 这就是 Levy 分布的特征函数((9.35)式).

现在来验证: 在(9.47)式中取 $\beta=1, \alpha=2$, 则该式的傅氏逆变换为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-A|K|^2 \Phi(k,t)) \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{d}k = A \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2},$$

这就是(9.42)式. 对于任意 α, 定义分数维导数

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K|^\alpha \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{d}k, \tag{9.49}$$

就导得分数维扩散方程(9.45).

这一节说明正常的随机游动产生通常的扩散方程(9.42), 而 Levy 类型的随机游动则产生一个分数的(fractional)微商的扩散方程(9.45).

§5 异常扩散的物理及标度不变性

从前面的讨论看到, 异常扩散的产生可能有如下两种物理机制:

a) 随机游动的两点之间的距离无特征尺度. 前面的 Weierstrass 游动中, 最短的游动距离是 a, 大的游动距离是 $b^\gamma a$, 它和 a 可以相差好几个数量级. 因而, 大的涨落导致大的扩散.

b) 物质的随机游动常常是在非均匀的介质, 如地球表层的淤泥和大气的湍流介质等. 此时, 物质在游动(扩散)到下一个位置之前, 总有一个等待时间(waiting time), 这个时间也是无特征尺度的, 即等待时间也是 Levy 分布(9.36)类型

$$P(\tau) \propto \tau^{-\alpha-1}. \tag{9.50}$$

由于这种等待时间的分布, 可能会发生的事件比我们用高斯分布所期望出现的时间晚很长时间才出现.

第六章曾讨论热传导方程(6.35)和 Navier-Stokes 方程(6.36)

的标度不变性，(6.35)式就是扩散方程(9.42)．而异常扩散遇到的都是具有分数维导数的偏微分方程，如方程(9.45)，其中的分数维微分方程运算见(9.49)式．若我们对(9.45)式作尺度变换

$$x' = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} x, \quad t' = \lambda t, \quad P' = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} P, \tag{9.51}$$

那么分数维方程(9.45)的形式仍具有不变性吗？

(9.51)式就是将一般扩散方程的变换(6.37)式中的 2 改写成为 α 而已．此时，对方程(9.45)，

$$左边 = \frac{\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}}{\lambda} \frac{\partial P'}{\partial t'}, \tag{9.52}$$

考虑到(9.49)式，对方程(9.45)，

$$右边 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K|^{\alpha} e^{-ik(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} x')} \cdot \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} P'(x', t') \mathrm{d}k = \frac{\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}}{\lambda} \frac{\partial^{\alpha} P'}{\partial x'^{\alpha}}. \tag{9.53}$$

请注意，

$$|K\lambda^{\frac{1}{\alpha}}|^{\alpha} = |K|^{\alpha}\lambda,$$

比较(9.52)式和(9.53)式看出，在(9.51)式的尺度变换下，方程(9.45)的形式不变！即方程(9.45)的解具有如下的自相似性：

$$P(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} x, \lambda t) = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} P(x, t), \tag{9.54}$$

特别地，当 $\lambda = \dfrac{1}{t}$，则上式变为

$$P(t^{-\frac{1}{\alpha}} x, 1) = t^{\frac{1}{\alpha}} P(x, t) \quad 或 \quad P(x, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} P(t^{-\frac{1}{\alpha}} x, 1). \tag{9.55}$$

对 Levy 分布

$$P \propto |x|^{-\alpha-1} \cdot t, \tag{9.56}$$

代入方程(9.54)式得

$$\begin{aligned} 左边 &= |\lambda^{\frac{1}{\alpha}} \cdot x|^{-\alpha-1} \cdot (\lambda t) = \lambda^{\frac{1}{\alpha}(-\alpha-1)} |x|^{-\alpha-1} (\lambda t) \\ &= \lambda^{-1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \lambda |x|^{-\alpha-1} t = |x|^{-\alpha-1} t \cdot \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} P(x, t) \equiv 右边. \end{aligned}$$

类似可证明用于异常扩散的非线性一维分数维 Burgers-KPZ 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}}=0, \tag{9.57}$$

具有如下的自相似关系：

$$u(x,t)=\lambda^{\alpha-1}u(\lambda x,\lambda^{\alpha}t). \tag{9.58}$$

习　题

1. 分析异常扩散的物理原因.

2. 已知最简单的一维随机游动的概率密度(9.17)式，求出它的特征函数(注：概率密度与特征函数互为傅氏变换).

3. 将(9.17)式代入扩散方程(9.42)中加以验证.

4. 证明(9.57)式满足(9.58)式的自相似关系.

第十章　多尺度的分析工具——小波变换

混沌和分形的共同特点是多尺度. 表征多尺度可以用标度指数，前几章已有论述. 标度指数是表征尺度变化时系统的某种不变性. 但是，不同尺度下物理的状态如何我们却看不到，而小波变换能作到这一点. 小波变换有两个参数：一个参数是尺度，它能把不同尺度的情况显示出来；另一个是时间(空间)位置，它能把每个位置上的状况显示出来，哪怕该位置上的物理状况特别小. 小波就像显微镜一样，放大而使你看得清楚.

§1　小波变换是显微镜

一个多尺度信号 $f(t)$ 的小波变换 $T_g(a,t)$ 定义如下：

$$T_g(a,t_0)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)\mathrm{d}t, \tag{10.1}$$

其中 $g(t)$ 称为母子波. 它和傅里叶变换不同之处在于：傅氏变换中的基函数是正弦或余弦函数，它们在整个实数轴$(-\infty,\infty)$上是全局铺开的，而子波变换中的 $g(t)$ 是局部的，如图 10.1 是常用的墨西哥帽小波，

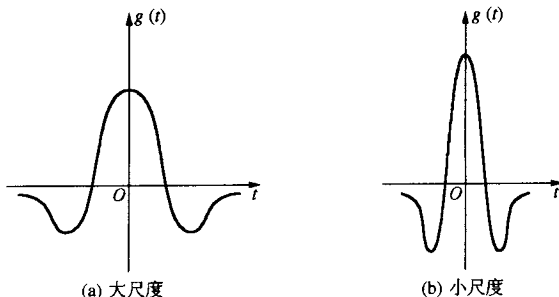


图 10.1　墨西哥帽小波

$$g(t)=(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{10.2}$$

它的图像只集中在 t 轴的局部区域，这和第六章介绍的 Haar 标度函数相同.

子波变换(10.1)式中有 a 和 t_0 两个参数，其中 a 称为尺度，t_0 称为位置. 它们在小波变换中是根据信号 $f(t)$ 的特征而可以自由选取的. (10.1)式中的母子波中含有尺度 a，尺度 a 越大，子波会矮会胖；尺度 a 越小，母子波会高会瘦，见图 10.1. 因而，信号 $f(t)$ 中的尺度 a 小，乘上放大倍数大的母子波 $g(t)$，可以使小信号看得清楚.

又如另外一个母子波，称为 Haar 子波 $g(t)$，它是 Haar 标度函数 $\varphi(t)$ 和 $\varphi(t-1)$ 相减的结果，即

$$g(t)=\varphi(t)-\varphi(2t-1), \tag{10.3}$$

其中

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{10.4}$$

参看(6.56)式，显然

$$\varphi(2t)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{10.5}$$

$$\varphi(2t-1)=\begin{cases}1, & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{10.6}$$

因此，

$$g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases}1, & t_0\leqslant t<t_0+\dfrac{a}{2},\\ -1, & t_0+\dfrac{a}{2}\leqslant t<t_0+a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{10.7}$$

其图像见图 10.2.

和墨西哥帽小波类似，由于(10.1)式右端积分号外有因子 $\frac{1}{a}$，因此尺度 a 愈小，Haar 子波会高会窄.

信号 $f(t)$ 中的小尺度信号的放大倍数大，像个显微镜，使看得

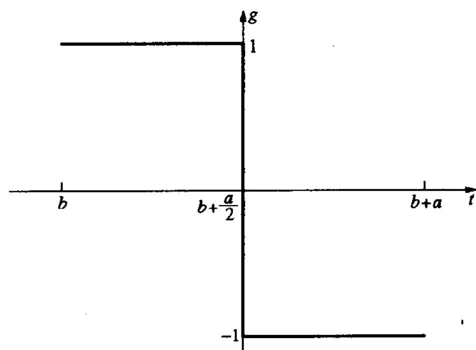


图 10.2　Haar 子波

清楚,所以子波变换称为数学显微镜.

§2　子波变换的尺度自相似性

第六章我们已经看到,对多尺度系统,大尺度和小尺度之间存在自相似的标度律. 同样,任何多尺度信号 $f(t)$ 的子波变换 $T_g(a,t_0)$ 也存在自相似性,即如果

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t), \tag{10.8}$$

则

$$T_g(\lambda a,\lambda t_0) = \lambda^\alpha T_g(a,t_0). \tag{10.9}$$

下面予以简单证明. 由(10.1)式得

$$\begin{aligned} T_g(\lambda a,\lambda t_0) &= \frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g\left(\frac{t-\lambda t_0}{\lambda a}\right)\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{t=\lambda x} \frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x) g\left(\frac{\lambda x-\lambda t_0}{\lambda a}\right)\mathrm{d}(\lambda x) \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^\alpha f(x) g\left(\frac{x-t_0}{a}\right)\mathrm{d}x \\ &= \lambda^\alpha T_g(a,t_0). \end{aligned}$$

(10.9)式说明,子波变换 $T_g(a,t_0)$ 和信号 $f(t)$ 有相同的自相似性,即相同的标度指数 α. 根据这一点,对固定的 t_0,有

$$T_g \propto a^\alpha. \tag{10.10}$$

因而,信号 $f(t)$ 的标度指数 α 可以通过 $f(t)$ 的子波变换而求得. 在双对数坐标($\lg a$-$\lg T_g$)中,选取不同的 a 和相应的 T_g,多个点的拟合直线的斜率就是信号 $f(t)$ 的标度指数 α.

应该指出,傅氏变换将空间域转换成波数 k 域,将时间域转换成频率域. $\frac{1}{k}$ 和 $\frac{1}{\omega}$ 分别就是信号的空间尺度和时间尺度. 因此,过去对信号 $f(t)$ 作谱分析,寻找 k 和 ω 为何值信号最强,来判断信号 $f(t)$ 的主要成分. 有了小波变换后,很多学者仍然看重参数 a,看信号 $f(t)$ 中哪个尺度 a 中的 T_g 最强,同样以此判断 $f(t)$ 的主要成分,这就没有发挥小波变换的优越性.

§3 子波变换检出 t_0 处信号的突变性

子波变换的独到之处在于它有一个时间(或空间)位置的参数 t_0,一个多尺度的信号 $f(t)$ 变化是非常剧烈的. 傅氏变换中没有这个参数,由于它有正弦和余弦这种全局的基函数,因而傅氏变换的结果是信号 $f(t)$ 全局铺开,平滑化了. 而小波变换中的 $g(t)$ 是局域的,将 $g(t)$ 平移到所要研究的时间位置 t_0,并按照 a 的大小来调整放大倍数 $g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$. 这样,信号 $f(t)$ 每一个时间位置 t_0 的状况都可以显示出来.

若用 $\varphi(t)$ 表示高斯函数:

$$\varphi(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{10.11}$$

那么(10.1)式中的母子波常可以取如下两种中的任何一种,即 $\varphi(t)$ 的一阶导数和 $\varphi(t)$ 的二阶导数:

$$g_1(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{10.12}$$

$$g_2(t) = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = (1-t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{10.13}$$

下面我们来证明(10.1)式中的子波变换 T_g 正比于由 φ 平滑后的函数 $f*\varphi_a$ 的一阶导数(若用 $g_1(t)$ 作母子波),或 T_g 正比于由 φ

平滑后的函数 $f*\varphi_a$ 的二阶导数(若用 $g_2(t)$ 作母子波). 其中

$$\varphi_a(t)=-\frac{1}{a}e^{-\frac{\left(\frac{t}{a}\right)^2}{2}},\tag{10.14}$$

$$f*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(t-u)\mathrm{d}u\tag{10.15}$$

表示卷积.

下面予以证明. 由(10.1)式, 若以 $g_1(t)$ 作为母子波, 则

$$\begin{aligned}T_g&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\cdot f(u)\cdot g\left(\frac{t-u}{a}\right)\mathrm{d}u\\&=f*\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{\left(\frac{t}{a}\right)^2}{2}}=f*\frac{1}{a}g_1\left(\frac{t}{a}\right)\\&=f*g_{1a}(t)=f*\left(a\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right)\\&=a\left(f*\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right),\end{aligned}\tag{10.16}$$

同理可以证明, 若以 $g_2(t)$ 作为母子波, 则

$$T_g=a^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f*\varphi_a).\tag{10.17}$$

在(10.16)式中, 我们用到了卷积与微分运算可交换的性质.

由(10.16)和(10.17)式, 我们就可以利用 T_g 的最大值或 T_g 的零点来判断信号 $f(t)$ 的突变点.

图 10.3 中, 设想在 t_0 和 t_2 位置上信号 $f(t)$ 发生了突变. 那么 $f(t)*\varphi_a$ 就相当于把信号进行了平滑, 平滑后的信号在 t_0 和 t_2 处就变成了拐点. 而根据(10.16)式, 子波变换 T_g 正比于 $f*g$ 的一阶导数, 拐点的一阶导数是最大. 所以, 若用 $g_1(t)$ 作为母子波, T_g 若是最大值, 则时间位置 t_0 和 t_2 就代表信号 $f(t)$ 的突变点. 同理, 根据(10.17)式, T_g 正比于 $f*g$ 的二阶导数, 而拐点处的二阶导数为 0, 因此, 若用 $g_2(t)$ 作为母子波, T_g 在 t_0 和 t_2 位置上穿过零点, 则该时间位置上的信号就代表 $f(t)$ 的突变点, 见图 10.3.

一般说, 多尺度信号 $f(t)$ 的突变现象是普遍的, 在子波变换时, 由于有时间位置 t_0 这个参数, 它就可能根据 T_g 的最大值或零点来判断信号 $f(t)$ 的突变时间位置, 这对寻找 $f(t)$ 的变化规律和预测,

均有很大的好处.

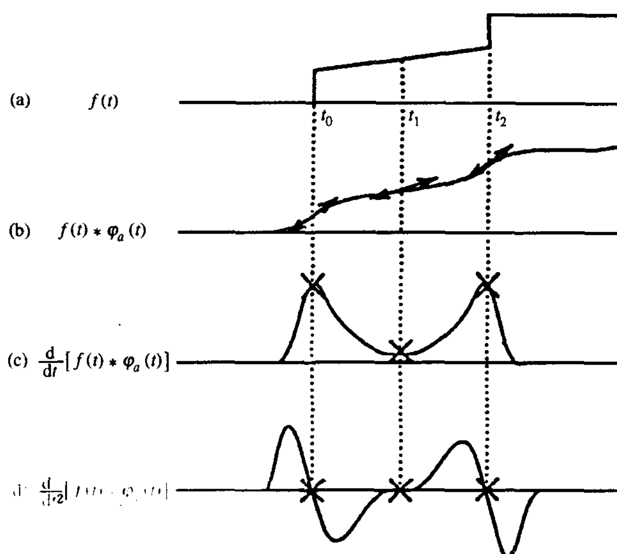


图 10.3 信号 $f(t)$突变点的判断

§4 从子波建立映射

上节已经看到,用 $g_1(t)=\frac{d\varphi}{dt}=te^{-\frac{t^2}{2}}$作母子波时,子波变换的最大值代表被变换信号 $f(t)$的突变点. 同时我们在第五章也看到,一个分形客体的测度分布,如图 5.6(b)和康托尔集合一样,几乎在不同尺度上都有突变点. 看如下个例:

一维映射:

$$t_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}t_n\equiv W_1(t), & P_1=\frac{1}{3},\\ \frac{1}{2}t_n+\frac{1}{2}\equiv W_2(t), & P_2=\frac{2}{3},\end{cases}\quad t_n\in[0,1] \tag{10.18}$$

和方程(5.15)类似,求到的不变测度分布如图 10.4.

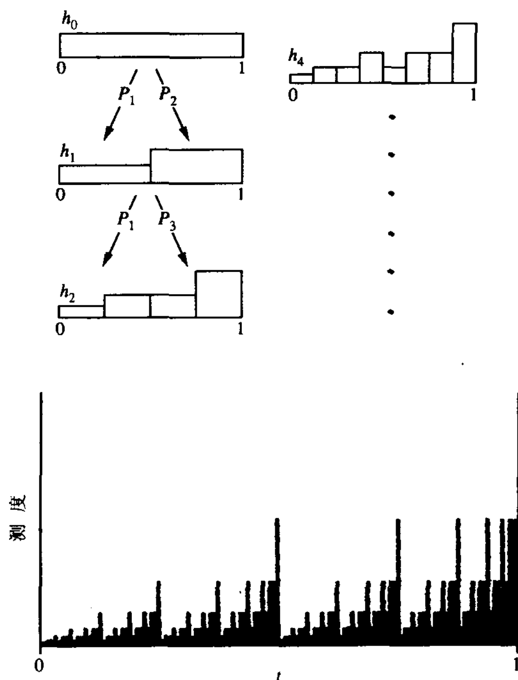


图 10.4　一维映射(10.18)式的不变测度分布

从图中看出,测度有明显的突变性. 如在 $t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{4}$ 和 $t=\frac{3}{4}$ 等处有突变发生,而且,不变测度 μ 的分布具有自相似性,如 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 区间内的测度分布和[0,1]内的测度分布是自相似的. 因此按照§2,测度分布的子波变换也具有自相似性. 按照§3,子波变换最大值线就是测度分布的突变点.

图 10.5 是测度 μ 的子波变换的极大值线,其横坐标是时间位置,纵坐标是尺度. 从图 10.5 看出,它和图 10.4 是多么相似.

我们从纵坐标的顶部开始(顶部尺度最大),从遇到首先出现极大值的点开始,从此点作出一水平线与相邻的最大值线相交,水平线的中点用黑点●表示,并把它称为分岔点. 令大尺度上的一个黑点与下一尺度层次上的两个黑点相对应,并用箭头表示,如图 5.4 上的箭

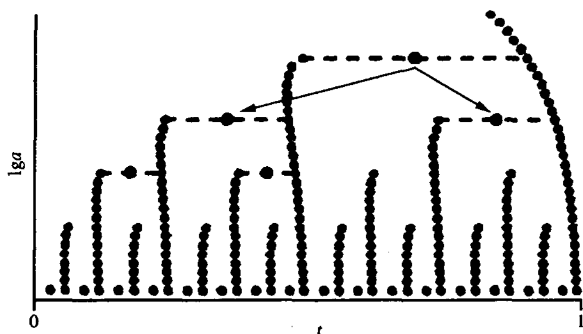


图 10.5 不变测度子波变换的极大值线

头，表示生了两个儿子. 与图 5.5 类似，绘制一个逆映射图，其纵坐标为上一尺度层次分岔点的时间位置 $t(n)$，横坐标为下一尺度层次上分岔点的位置 $t(n+1)$，作一个一维分段映射图，见图 10.6.

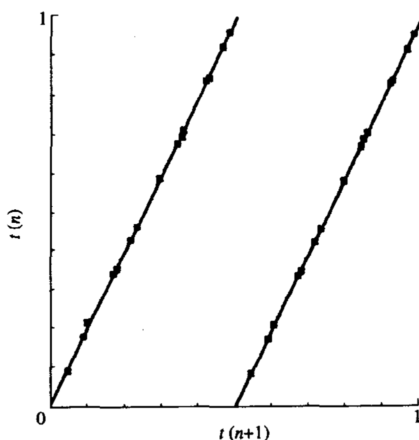


图 10.6 由子波变换最大值线作出的一维映射

这个映射图是突变点随时间演化的规律图像，它有预测的意义.

§5 高斯类子波所满足的偏微分方程

子波变换(10.1)式是一个积分表达式，有时使用起来不大方便.

但是，使用高斯类子波（(10.12)和(10.13)式）作为母子波函数，就很容易求得子波变换 T_g 的偏微分方程.

若(10.1)式中的母子波是(10.12)式的 $g_1(t)$，则将(10.1)式对 a 求导数，得到

$$\frac{\partial T_g(a,t_0)}{\partial a} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{a}g_1(x)\right]\mathrm{d}t, \tag{10.19}$$

式中 $x=\frac{t-t_0}{a}$. 积分符号中

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{a}g_1(x)\right] = -\frac{1}{a^2}g_1(x) - \frac{1}{a^2}x\frac{\mathrm{d}g_1(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{10.20}$$

很容易验证，高斯函数(10.11)式的 n 阶导数有如下关系：

$$(n+1)g_n(t) + tg_{n+1}(t) + g_{n+2}(t) = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$g_0(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{10.21}$$

将 $n=1$ 代入上式得

$$2g_1(x) + xg_2(x) + g_3(x) = 0$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}g_1(x)}{\mathrm{d}x} = g_2(x) = \frac{1}{x}[-g_3(x) - 2g_1(x)], \tag{10.22}$$

将(10.22)式代入(10.20)式得

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{a}g_1(x)\right] = -\frac{1}{a^2}g_1(x) - \frac{1}{a^2}[-g_3(x) - 2g_1(x)]$$

$$= \frac{1}{a^2}[g_1(x) + g_3(x)]. \tag{10.23}$$

故(10.19)式变为

$$\frac{\partial T_g(a,t_0)}{\partial a} = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[g_1(x) + g_3(x)]\mathrm{d}t. \tag{10.24}$$

同理，将(10.1)式对 t_0 微商，得到

$$\frac{\partial T_g(a,t_0)}{\partial t_0} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[-\frac{1}{a}g_2(x)\right]\mathrm{d}t,$$

再对 t_0 求一次导数，得到

$$\frac{\partial^2 T_g(a,t_0)}{\partial t_0^2} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{a^2}g_3(x)\right]\mathrm{d}t, \tag{10.25}$$

合并(10.24)式和(10.25)式，有如下关系：

$$a\frac{\partial^2 T_g}{\partial t_0^2}-\frac{\partial T_g}{\partial a}+\frac{1}{a}T_g=0. \tag{10.26}$$

(10.26)式就是用 $g_1(t)$ 作为母子波时，子波变换所满足的偏微分方程，它是变系数的，对不同信号 $f(t)$，它们都满足(10.26)式，但对不同的初条件和边条件，方程有不同的解.

同理，若用 $g_2(t)$ 作为母子波，则子波变换所满足的偏微分方程为

$$a\frac{\partial^2 T_g}{\partial t_0^2}-\frac{\partial T_g}{\partial a}+\frac{2}{a}T_g=0. \tag{10.27}$$

作为(10.26)式的应用，很容易找到(10.26)式的一个特解

$$T_g(a,t_0)=a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}a^2}\cos\lambda t_0 \quad 或 \quad T_g(a,t_0)=a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}a^2}\sin\lambda t_0, \tag{10.28}$$

其中 λ^2 是与 a 和 t_0 无关的常数.

按子波变换模最大值要求，应有

$$\frac{\partial T_g}{\partial t_0}=0 \quad 和 \quad \frac{\partial^2(T_g^2)}{\partial t_0^2}<0, \tag{10.29}$$

如取(10.28)式的第一个式子作为解，(10.29)式为

$$\frac{\partial T_g}{\partial t_0}=-a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}a^2}\lambda\sin\lambda t_0=0, \tag{10.30}$$

$$\frac{\partial^2(T_g^2)}{\partial t_0^2}=(a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}a^2})^2(-2\lambda^2\cos 2\lambda t_0)<0. \tag{10.31}$$

由(10.30)式得到

$$\lambda t_0=0,\ \pm n\pi,\quad n=1,2,\cdots. \tag{10.32}$$

对(10.32)式的这些点，(10.31)式成立.

取 $\lambda=\pi$，则 $t_0=0$ 应该是最大尺度上的突变点. 我们用 1851～1984 年北半球的地表气温资料，作出模最大值线图. 对 $a=25$ 年(见图 10.7(a))，将(1851，1984)归一化得到的中点应是 1919 年，而图 10.7(a)的实际最大值点是 1918 年(图中的 A 点)，预测误差并不大. 同样按照(10.32)式，下一个尺度层次的突变点应是 1851 到

1918和1918到1984年的中心点，它们是1920年生的两个“儿子”. 预测值是1985和1952年，而实际的值是图10.7(b)中的B和C两点，其中$a=5$年，差别比刚刚大一点. 第三尺度层次的突变点预测值分别是1874年、1897年、1941年和1963年. 它们分别是B,C两点各生的两个“儿子”，实际子波变换值是图10.7(b)中的d,e,f和g四个点，实际值与预测值差别不大. 这说明T_g的偏微分方程(10.26)或(10.27)还是有很大用处的.

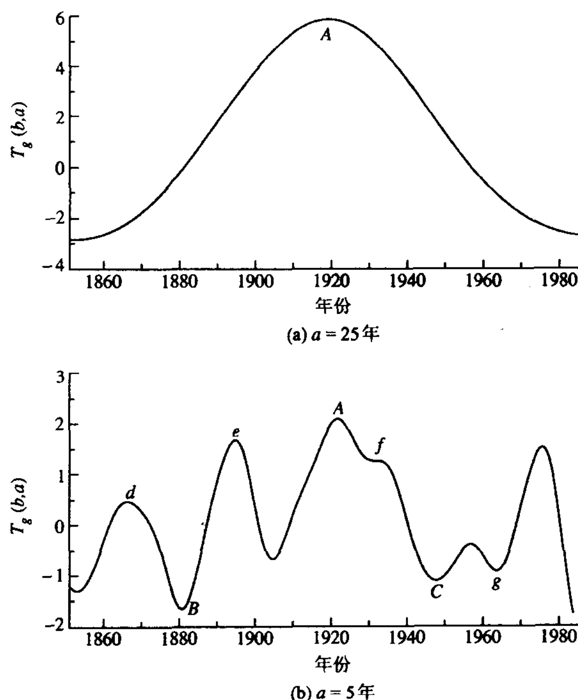


图10.7　气候序列的子波变换

§6　子波是孤立波吗

第三章我们曾经论证过，偏微分方程的孤立波和冲击波分别和常微分方程的同宿轨道和异宿轨道相对应. 由于子波的局部性质，无

论是 Haar 子波((10.3)式)还是墨西哥帽子波((10.2)式),它们均满足当 $t\to\pm\infty$时,$g(t)\to 0$.因此,从形式上看,应该是同宿轨道或是一种孤立波.问题是:传统的观点认为,孤立波只能存在于非线性的保守系统或耗散系统中.现在 Haar 子波的标度函数 φ 满足线性函数方程(6.57);墨西哥帽子波满足变系数线性常微分方程(10.21),这种变系数线性方程能存在同宿轨道的孤立波吗?

在(10.21)式中取 $n=2$,那么 $g_4(t)$就是墨西哥帽子波的二阶导数 $g''(t)$.所以,墨西哥帽子波 $g\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$ 若看成是变量 $\xi=x-ct$ 的一个向右移动的结果,那么它应满足如下的线性变系数方程:

$$g''(\xi)+\xi g'(\xi)+(n+1)g(\xi)=0, \qquad (10.33)$$

我们对(10.33)式作一个变换:

$$g(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}y(\xi), \qquad (10.34)$$

则(10.33)式变化为

$$y''(\xi)+\frac{1}{2}\left[(2n+1)-\frac{1}{2}\xi^2\right]y(\xi)=0, \qquad (10.35)$$

(10.35)式就是著名的第二种 Weber 方程.

若再令

$$\eta=\frac{\xi}{\sqrt{2}}, \qquad (10.36)$$

则(10.35)式化为

$$y''(\eta)+\frac{1}{2}[(2n+1)-\eta^2]y(\eta)=0, \qquad (10.37)$$

(10.37)式就是著名的第一种 Weber 方程.

(10.37)式的特征值为$(2n+1)$的有界解为

$$y(\eta)=\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}H_n(\eta), \qquad (10.38)$$

所以,(10.35)式的有界解为

$$y(\xi)=2^{-\frac{n}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}H_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right), \qquad (10.39)$$

其中,H_n 是 Hermit 多项式,且 $H_0(\xi)=1$,$H_1(\xi)=2\xi$,$H_2(\xi)=2(2\xi^2-1)$.在(10.39)式中取 $n=2$,很容易验证(10.34)式就是墨西

哥帽子波(10.2)式.

为了分析渐进状态,(10.37)式可化为

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -\left[(2n+1) - \eta^2\right]y, \end{cases} \tag{10.40}$$

由(10.38)式 $\eta=0$ 的初条件($y=-2, z=0$)的 A 点出发,在相平面(y,z)上作出的轨线见图 10.8. 图中 ABO 是 $y\to+\infty$ 的轨道,OBA 是 $y\to-\infty$ 的轨道.

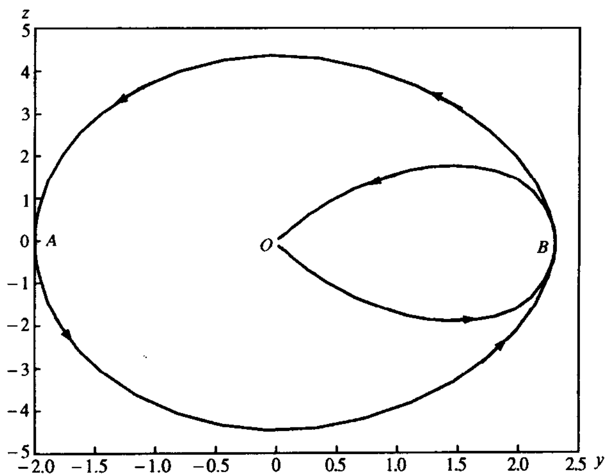


图 10.8　(10.40)的轨道

A 为相空间(y,z)中的轨道,B 为相空间(y,z,η)中的轨道

事实上,从物理上讲,方程(10.37)是一个正、负恢复力相结合的系统. $\eta\to\pm\infty$时是负恢复力,方程(10.37)可以写成

$$y'' - \eta^2 y = 0, \tag{10.41}$$

令 $x=\eta^2$,则

$$y' = \frac{dy}{d\eta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\eta} = \frac{dy}{dx}2\eta,$$

$$y'' = \frac{dy'}{d\eta} = 2\eta\frac{dy'}{dx} = 2\eta\frac{d}{dx}\left(2\eta\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= 4\eta^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}.$$

故方程(10.41)化成

$$4x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0 \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{4x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{4}=0,$$

当 η(或 x)很大时,该方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{y}{4}=0, \tag{10.42}$$

(10.42)式是一个负恢复力的常系数微分方程,按照第三章的分析,显然$(y,z)=(0,0)$点是一个鞍点,所以图 10.8 是一个同宿轨道.

但是(10.37)式在 $\eta=0$ 附近就变成

$$y''(\eta)+\frac{1}{2}(2n+1)y(\eta)=0, \tag{10.43}$$

它是一个正恢复力的方程,因此在 $\eta=0$ 附近是一个焦点,所以 $\eta=0$ 处要作振荡.

若以 y 和 η 分别作纵、横坐标,则墨西哥帽子波图像如图 10.9.

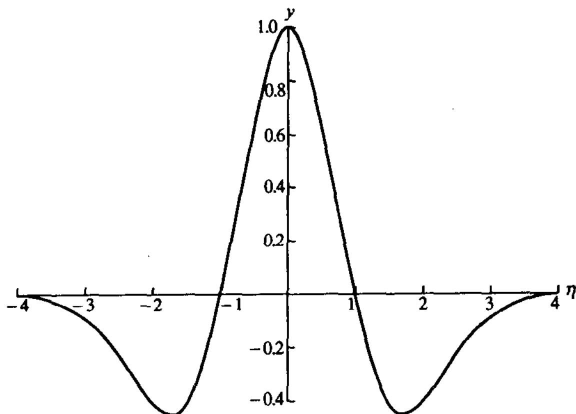


图 10.9 孤立波

显然它是一个孤立波.

习　题

1. 子波变换和傅氏变换有什么异同?
2. 如何充分利用子波变换中的时间参数 t_0 去作预测?
3. 由子波建立的映射怎么用于预测?

参 考 书

1. 郝柏林(著). 从抛物线谈起——混沌动力学. 上海：上海科技教育出版社，1995

2. 刘式达等(译). 混沌的本质. 北京：气象出版社，1997

3. 张叔誉(译). 混沌,开创新科学. 上海：上海译文出版社，1990

4. Peitgen 等(著). Chaos and Fractals. Springer，1992

5. 刘式达等(著). 分形和分维. 北京：气象出版社，1993

6. 潘涛(译). 上帝掷骰子吗？混沌之数学. 上海：上海远东出版社，1995

7. Argyris 等(著). An exploration of chaos. North-Holland，1994

8. 刘式达等(著). 非线性动力学和复杂现象. 北京：气象出版社，1989

9. 刘式达等(译). 机会与混沌. 上海：上海科技教育出版社，2001

10. Jackson (著). Perspective of nonlinear dynamics. Cambridge University，1990

11. 杨立等(译). 混沌对科学和社会的冲击. 湖南：湖南科学技术出版社，2001

12. 朱竑雄(译). 混沌学引论. 四川：四川教育出版社，1994

13. Tsonis(著). Chaos，from theory to applications. Plenum，1992

14. Feder(著). Fractals. Plenum，1988

15. 王兰宇(译). 天遇——混沌与稳定性的起源. 上海：上海科技教育出版社，2001

16. 刘式适、刘式达(著). 物理学中的非线性方程. 北京：北京

大学出版社，2000

17. Enns(著). Nonlinear physics with maple for scientists and Engineers. Birkhauser，1997

18. Lasota & Mackey（著）. Chaos，Fractals and Noise，Stochastic Aspects of Dynamics. Springer，1994

19. 欧阳颀(著). 反应扩散系统中的斑图动力学. 上海：上海科技教育出版社，2000

20. Ott（著）. Chaos in dynamical system. Cambridge University，1993

[General Information]
书名=自然科学中的混沌和分形
作者=刘式达　梁福明　刘式适　辛国君编著
页数=159
SS号=11251596
DX号=
出版日期=2003年11月第1版
出版社=北京大学出版社